25
Eina-e

Mètodes quantitatius per l'anàlisi econòmica

José Manuel Giménez-Gómez
Cori Vilella

[publicacions]
urv

Pròleg

Aquesta publicació està dirigida als estudiants de segon curs del grau d'Economia en l'assignatura de Mètodes quantitatius per a l'anàlisi econòmica. L'objectiu principal és oferir uns apunts que puguin ajudar l'alumne a seguir millor l'assignatura, tenint en compte que es tracta d'una assignatura presencial i, per tant, s'han de complementar amb les explicacions del professor a classe i els exercicis de l'assignatura. Amb aquest material voldríem cobrir dos objectius principals. En primer lloc, permetre als estudiants venir a classe havent llegit prèviament el que s'explicarà cada dia i, així, poder seguir millor les explicacions. En segon lloc, donar més temps als alumnes durant la classe per poder escoltar el professor i ampliar aquests apunts amb les explicacions que es donen a la classe, altres exemples i exercicis.

Esperem que aquest material compleixi els objectius indicats i pugui ser útil als nostres alumnes.

José-Manuel Giménez-Gómez i Cori Vilella Bach

Índex

Tema 1: Funció composta, implícita i homogènia

Observació: Recordem que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ són derivables, llavors la funció $h = g \circ f := g(f(x))$ també és derivable i:

$$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

Suposem ara que tenim $z = f(x, y)$ i $x = x(t)$, $y = y(t)$. O el que és el mateix, $z(t) = f(x(t), y(t))$. Per calcular z_t (la derivada de z respecte de t) farem el següent exercici:

$$z_t = \left(f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t)\right)\Big|_{\substack{x = x(t) \\ y = y(t)}}$$

Exemple: $f(x, y) = e^{x+y}$, $x(t) = t^2 - 1$ i $y(t) = e^t$. Llavors

$$z_t = z'(t) = \left(e^{x+y}2t + e^{x+y}e^t\right)\Big|_{\substack{x = t^2 - 1 \\ y = e^t}}$$

Observació: Suposem ara que tenim $z = f(x, y)$ i $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$. O el que és el mateix $z(t, s) = f\left(x(t, s), y(t, s)\right)$. Per calcular z_t i z_s (les derivades de z respecte de t i s, respectivament), farem el següent exercici:

$$z_t = \left(f_x(x, y)x_t(t, s) + f_y(x, y)y_t(t, s)\right)\Bigg|_{\substack{x = x(t,s) \\ y = y(t,s)}}$$

$$z_s = \left(f_x(x, y)x_s(t, s) + f_y(x, y)y_s(t, s)\right)\Bigg|_{\substack{x = x(t,s) \\ y = y(t,s)}}$$

Definició: Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (atenció ara tenim una funció amb diferents components!) és una funció diferenciable (existeixen les derivades parcials i totes són contínues), la matriu Jacobiana de f en $x_0 \in D$ es denota $Jf(x_0)$ i és la matriu:

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Exemple: $f(x,y) = (x + y^2, e^{x-y})$ i $x_0 = (1,1)$. Llavors:

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}_{|x=(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema: Donades $f : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ i $g : A \supset f(D) \subset \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$ diferenciables, si $h = g \circ f$, llavors:

$$Jh(x) = Jg\left(f(x)\right) Jf(x)$$

Exemple: Donades $f(x,y) = (xy, e^{xy})$, $g(x,y) = x^2 + y^2$ i $h(x,y) = g\left(f(x,y)\right)$, llavors:

$$Jh(1,1) = Jg\left(f(1,1)\right) Jf(1,1) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}_{|(1,e)} \begin{pmatrix} y & x \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}_{|(1,1)}$$

Si substituïm s'obté:

$$Jh(1,1) = \begin{pmatrix} 2+2e^2 & 2+2e^2 \end{pmatrix}$$

Observació: Les derivades parcials d'una funció $z = f(x, y)$ són també funcions de dues variables, per tant té sentit tornar a derivar parcialment:

$$\begin{array}{ccc} f_x(x,y) & \longrightarrow & f_{xx}(x,y) \quad \text{i} \quad f_{xy}(x,y) \\ f_y(x,y) & \longrightarrow & f_{yx}(x,y) \quad \text{i} \quad f_{yy}(x,y) \end{array}$$

I així successivament.

Observació: La notació f_{xxx} significa derivar f_{xx} respecte de x, mentre que f_{xxy} significa derivar f_{xx} respecte de y, etc.

Exemple: Si $f(x,y) = \sin(xy) + e^{xy}$, sabem que:

$$f_x(x,y) = y\cos(xy) + ye^{xy}$$
$$f_y(x,y) = x\cos(xy) + xe^{xy}$$

Per tant:

$$f_{xx}(x,y) = -y^2\sin(xy) + y^2e^{xy}$$

$$f_{xy}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy) + e^{xy} + xye^{xy}$$

$$f_{yx}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy) + e^{xy} + xye^{xy}$$

$$f_{yy}(x,y) = -x^2\sin(xy) + x^2e^{xy}$$

Teorema: Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, suposem que f admet derivades parcials segones i que aquestes són funcions contínues. Llavors:

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \quad \forall\ (x,y) \in D$$

Observació: De la mateixa manera si la funció f és suficientment regular, tenim que $f_{xyx} = f_{xxy}$, o (en el cas de tres variables) $f_{xzyz} = f_{xyzz}$, etc. No importa l'ordre de derivació sinó el nombre de vegades que derivem respecte de cada variable.

Exemple: Suposem que un model econòmic preveu que el preu mitjà d'un pis, x, i el tipus d'interès, y, estan relacionats per l'equació $F(x, y) = 0$.

Actualment $x = x_0$ i $y = y_0$; per tant, es compleix que $F(x_0, y_0) = 0$.

Com a govern només puc "actuar"sobre y, però a mi m'interessa saber com afectarà això a x.

Si jo pogués saber que $F(x, y) = 0$ implica que $x = x(y)$, llavors podria conèixer l'impacte sobre x dels meus moviments sobre y.
Seria suficient conèixer si l'efecte de la meva política monetària afecta positivament o negativament la variable del preu dels pisos...

Prenem l'equació $F(x, y) = 0$ i un punt (x_0, y_0) tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Ens preguntem si aquesta equació permet definir la variable y com a funció de la variable x. És a dir, ens preguntem si existeix una funció $y = y(x)$ de tal forma que:

- $y(x_0) = y_0$
- $F(x, y(x)) = 0$

Exemple: Si tenim $F(x, y) = x^2 + y - 1 = 0$, està clar que $y(x) = 1 - x^2$ compleix la segona condició i el punt $(0, y(0) = 1)$, la primera.

Exemple: Si tenim $F(x, y) = x^2 - y\sin(xy) + 10 = 0$ i volem realizar el mateix que abans (aïllar la variable y), no podem.

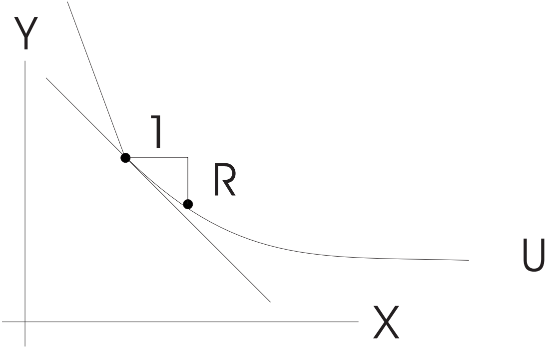
Qüestió: Segueix essent cert que l'equació $x^2 - y\sin(xy) + 10 = 0$ defineix $y = y(x)$ (implícitament)?

Teorema (versió simplificada): Si $F(x,y)=0$, F admet derivades parcials contínues en tot punt. Donat(x_0,y_0), de tal manera que $F(x_0,y_0)=0$, i suposem que $F_y(x_0,y_0)\neq 0$; llavors existeix una funció f definida en un entorn U de x_0, tal que:

- $f(x_0)=y_0$ i $F\left(x,f(x)\right)=0$ a U
- f és derivable a U i:

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)},\ x\in U$$

Exemple: Si $U(x,y)$ és la utilitat d'un consumidor.



La RMS (relació marginal de substitució) ens diu les unitats de y que estic disposat a renunciar per consumir una unitat més de x.

Matemàticament, la RMS és el pendent de la recta tangent a la corba $U(x, y) = c$. Però si interpretem aquest pendent com la recta tangent a la corba $y = y(x)$ que es defineix per $U(x, y) = c$, precisament el que busquem és $y'(x)$. Apliquem el teorema anterior per obtenir la derivada:

$$RMS(x, y) = y'(x) = -\frac{U_x(x, y)}{U_y(x, y)}$$

(El signe negatiu indica la "renúncia".)

Una classe de funcions especialment importants en economia són les funcions homogènies.

Definició: Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, direm que f és homogènia de grau m, $m \in \mathbb{R}$ si i només si $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$ per tot $(x, y) \in D$ i $t > 0$.

En general, una funció vectorial, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és homogènia si totes les components són homogènies.

Interpretació del grau d'homogeneïtat:

- Si $m = 0$, llavors $f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$. Si les variables independents varien proporcionalment, la funció no varia.
- Si $m = 1$, llavors $f(tx, ty) = tf(x, y)$. Les variables independents i la funció varien en la mateixa proporció.
- Si $m > 1$, la funció varia proporcionalment més que les variables independents.
- Si $m < 1$, la funció varia proporcionalment menys que les variables independents.

- Si f i g són funcions homogènies de grau m, llavors $f+g$ és homogènia de grau m.
- Si f és homogènia de grau m i $k \in \mathbb{R}$, llavors kf és homogènia de grau m.
- Si f és homogènia de grau m i g és homogènia de grau n, llavors $f \Delta g$ és homogènia de grau $m+n$.
- Si f és homogènia de grau m i g és homogènia de grau n, $g(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2$, llavors $\frac{f}{g}$ és homogènia de grau $m-n$.
- Si f és homogènia de grau m, llavors f_x i f_y són homogènies de grau $m-1$.

Teorema: Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és diferenciable. Llavors: f és homogènia de grau $k \Leftrightarrow xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = kf(x,y)$.

Observació: El teorema també és cert per a funcions de més de dues variables.

La funció relaciona la producció total d'una economia, Q, amb els factors productius capital, K, i treball, L

$$Q(K,L) = Ak^{\alpha}L^{\beta},\ on\ A > 0,\ 0 \leq \alpha + \beta \leq 1$$

Exercici: Podem veure que:

- És homogènia de grau $\alpha + \beta$.
- Les productivitats marginals $Q_k(K,L)$ i $Q_L(K,L)$ són homogènies de grau $\alpha + \beta - 1$.
- Les elasticitats parcials, $E_k Q(K,L) = \alpha$ i $E_L Q(K,L) = \beta$.
- Es verifica el teorema d'Euler.

Tema 2: Equacions diferencials ordinàries

Definició: Una equació diferencial (ordinària), usualment anomenada EDO, és una equació en la qual intervenen derivades i que conté una sola variable independent:

$$F\left(x, y, y', y'' \dots y^n\right) = 0$$

en què y, la incògnita, denota una funció de la variable x.

Exemples:

$$xy' + y = 0, \quad y' = y + x, \quad y'' - 3(y')^2 + 1 = 0, \quad y' = y^2 \dots$$

Objectiu: Trobar la funció $y(x)$ que verifiqui l'equació. Aquesta funció $y(x)$ serà una solució d'EDO.

Anomenem ordre d'una EDO a l'ordre més gran de derivació que apareix a l'EDO.

Anomenem grau d'una EDO a l'exponent màxim al qual està elevat el més gran dels ordres de derivació.

Exemples:

$xy' + y = 0 \rightarrow$ ordre 1 i grau 1.

$y'' - 3(y')^2 + 1 = 0 \rightarrow$ ordre 2 i grau 1.

$(y''')^2 + 3(y''')^4 + (y')^8 - y' = 0 \rightarrow$ ordre 3 i grau 4.

Definició: Una solució de l'EDO $F(x, y, y' \dots y^n) = 0$ és una funció $y(x)$ que compleix l'equació en algun interval I, és a dir:

$$F(x, y(x), y'(x) \dots y^n(x)) = 0 \;\; \forall \, x \in I$$

Exemple: Si tenim l'EDO $y' = x \cdot y$ volem veure com trobar una funció $y(x)$, tal que:

$$y'(x) = x \cdot y(x)$$

Observem que si prenem $y(x) = e^{x^2/2}$ es compleix que:

$$y'(x) = x \; e^{x^2/2} = x \cdot y(x)$$

Definició: El conjunt de totes les solucions que admet una EDO rep el nom de família general de solucions o solució general. La família té tants paràmetres com ordres té l'equació (recordem que l'ordre de l'equació és l'ordre de la derivada més gran que hi apareix).

Exemples:

- Si $y' = x \cdot y$, la solució general és:

$$G(x, y, c) = y - c\ e^{x^2/2} = 0$$

  Recordem que $y = c\ e^{x^2/2}$.

- Si $y' = 1$, la solució general és:

$$G(x, y, c) = y - x - c = 0$$

- Si $f(x, y, y' \dots y^n) = 0$, la solució general serà del tipus:

$$G(x, y, c_1, c_2 \dots c_n) = 0.$$

Exemple: $y' = xy$

Observem que $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ satisfà:

$$y'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} = xy(x)$$

Per tant, és una solució de l'EDO.

Observem que $y(x) = 25e^{\frac{x^2}{2}}$ també és una solució, ja que:

$$y'(x) = 25e^{\frac{x^2}{2}}\frac{2x}{2} = xy(x)$$

Per tant, $y = ce^{\frac{x^2}{2}}$ és la solució general de l'EDO.

Per a cada constant c tenim una solució particular:

- Per a $c = 1$, $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ és la solució particular.
- Per a $c = 25$, $y = 25e^{\frac{x^2}{2}}$ és la solució particular.

Una EDO admet infinites solucions.

Problema de valor inicial (PVI)

Definició: Diem que una EDO és de primer ordre si la derivada més alta que apareix en l'equació és la derivada primera. S'escriu com:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \rightarrow \quad y' = f(x, y)$$

Definició: Es diu problema de valor inicial o problema de Cauchy al fet de buscar la solució del problema:

$$\begin{array}{ll} y' = f(x, y) & \text{(EDO)} \\ y(x_0) = y_0 & \text{(condició inicial)} \end{array}$$

Teorema: Si la funció $f(x, y)$ satisfà que:

- $f(x, y)$ és contínua.
- existeix $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ i és contínua.

Llavors el PVI admet una solució única, és a dir, existeix una única funció $y(x)$ que satisfà l'equació i la condició inicial.

Exemple: $y' = y$

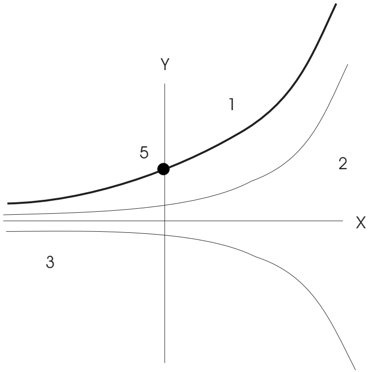
Solució general: $y(x) = ce^x$

Si imposem la condició inicial $y(0) = 2$ llavors:
$y(0) = ce^0 = 2 \Rightarrow c = 2$, per tant:

$$y(x) = 2e^x$$

és una solució particular del PVI.

$$y(x) = ce^{x}$$



$$F(x, y, y') = 0 \rightarrow y' = f(x, y)$$

Segons l'estructura de les EDO utilitzarem tècniques diferents:

- Variables separades
- Variables separables
- Homogènies
- Lineals
- Exactes.

Definició: Una EDO de primer ordre es diu que és de variables separades si s'escriu:

$$y' = f(x)g(y)$$

O el que és el mateix:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Resolució:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx$$

I ara integrem els dos costats

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx$$

Exemple: Resoleu

$$y' = x \cdot y$$
$$y(0) = 1$$

L'equació és de variable separada ($f(x) = x$ i $g(y) = y$), per tant:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y}\, dy = x\, dx$$

Integrem els dos costats:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int x\, dx \quad \rightarrow \quad \ln |y| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

Aïllem la y:

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + c} = c_1 e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Com que $y(0) = 1$, cal que $y(0) = c_1 e^0 = 1$.
Per tant, $y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$.

Exemple: Resoleu:

$$y' = y^2$$
$$y(1) = 2$$

L'equació és de variable separada ($f(x) = 1$ i $g(y) = y^2$), per tant:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y^2}\, dy = dx$$

Integrem els dos costats:

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int dx \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x + c \quad \rightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{x+c}$$

Com que $y(1) = 2$, cal que $y(1) = -\frac{1}{1+c} = 2 \rightarrow c = -3/2$.
Per tant, $y(x) = -\frac{1}{x-\frac{3}{2}}$.

MODEL 1: Estructura:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

Resolució: Dividim per $N_1(y)M_2(x)$,i suposem que $N_1(y)M_2(x) \neq 0$:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy = 0$$

De manera que ens queden les variables separades:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

Exemple: Resoleu:

$$\sin x \cos y \ dx + \cos x \sin y \ dy = 0$$

Dividim per $\cos y \cos x$ i obtenim:

$$\frac{\sin x}{\cos x} \ dx + \frac{\sin y}{\cos y} \ dy = 0$$

Integrant:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \ dx + \int \frac{\sin y}{\cos y} \ dy = k$$

$$-\ln \cos x - \ln \cos y = k = -\ln c$$

$$\ln(\cos x \cos y) = \ln c \quad \rightarrow \quad \cos x \cos y = c$$

Estructura:

$$P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0$$

En què $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ són funcions homogènies del mateix grau m.

Resolució: Fem el canvi $u = \frac{x}{y}$; és a dir, $y = ux$, ja que qualsevol funció $z = f(x,y)$ homogènia de grau m, en fer aquest canvi es transforma en una $x^m g(u)$ de variables x i u. Per tant, l'equació inicial quedarà:

$$x^m P_1(u)\ dx + x^m Q_1(u)\ dy = 0$$

Com que $dy = u\ dx + x\ du$ si substituïm tenim:

$$x^m P_1(u)dx + x^m Q_1(u)(u\ dx + x\ du) = 0$$

$$x^m P_1(u)dx + x^m Q_1(u)(u\ dx + x\ du) = 0$$

Si ho dividim tot per x^m, suposant que $x \neq 0$, obtenim:

$$(P_1(u) + uQ_1(u))\ dx + xQ_1(u)\ du = 0$$

Una EDO amb variables separables. Per tant, hem de dividir per $x(P_1(u) + uQ_1(u)) \neq 0$ i obtenim:

$$\frac{dx}{x} + \frac{Q_1(u)\ du}{P_1(u) + uQ_1(u)} = 0$$

Ara cal integrar i, al final, desfer el canvi.

Exemple: Resoleu $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.
Observem que és homogènia i, per tant, fem el canvi:
$u = \frac{y}{x} \to y = ux \to y' = \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ o sigui $dy = udx + xdu$:

$$x(u + x\frac{du}{dx}) = \sqrt{x^2 - u^2x^2} + ux$$

$$x(u + x\frac{du}{dx}) = x(\sqrt{1 - u^2} + u)$$

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}$$

Integrem

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}, \text{ EDO amb variables separades}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\arcsin u = \ln|x| + k \quad \rightarrow \quad u = \sin(\ln|x| + k)$$

Desfem el canvi:

$$y = x\sin(\ln|x| + k)$$

Estructura: Una EDO de primer ordre es diu que és lineal si s'escriu:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

en què $p(x)$ i $q(x)$ són funcions contínues. Si $q(x) \equiv 0$ diem que l'equació és lineal homogènia. Altrament diem que l'equació és lineal no homogènia.

Resolució: L'equació lineal homogènia és de variable separada.

La solució de l'equació lineal no homogènia és:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} \, dx + c \right)$$

Exemple: Resoleu $y' - y = x \;\rightarrow\; p(x) = -1, \;\; q(x) = x$; per tant:

$$y = e^{-\int -dx}\left(\int xe^{\int -dx}\, dx + c\right) = e^{x}\left(\int xe^{-x}\, dx + c\right) =$$

$$= (\text{per parts}) \ldots = ce^{x} - x - 1$$

O sigui que:

$$y = ce^{x} - x - 1 \;\; (\text{solució general})$$

Si imposem $y(0) = 1$ tenim: $c - 1 = 1 \Rightarrow c = 2$:

$$y = 2e^{x} - x - 1 \;\; (\text{solució particular del PVI})$$

Estructura: Una EDO de la forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es diu exacta si existeix una funció $f(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

Resolució: La solució general serà $f(x,y) = c$.

Teorema: Si $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es verifica:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \Leftrightarrow \text{L'EDO és exacta.}$$

Si $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ i busquem la solució: $f(x,y) = c$.

Hem vist que $P(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, per tant:

$$f(x,y) = \int P(x,y)dx = F(x,y) + \varphi(y)$$

($\varphi(y)$ és la constant d'integració respecte de x; per tant, és una funció de y.)

Calculem $\varphi(y)$ derivant el resultat anterior respecte de y i sabent que $Q(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

Aïllem,

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = Q(x,y) - \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$

Integrem respecte de y:

$$\varphi(y) = \int Q(x,y) - \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy$$

Exemples:

1. $2xy\ dx + (x^2 + \cos y)\ dy = 0$
2. $(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2\cos xydy = 0$
3. $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$

Tema 3: Mètodes matemàtics per a la presa de decisions socials

L'inici de la teoria de jocs remunta al 1944 amb J. Von-Newmann i O. Morgenstern (*Theory of games and economic behavior*).
Des de llavors ha evolucionat substancialment i s'ha aplicat a l'economia i a altres camps com poden ser la ciència política, la informàtica, la biologia, etc. Ha interessat en diferents àmbits ja que és una base per construir models de conducta humana. Hi ha moltes situacions conflictives en les quals intervenen diversos agents i, per tant, hi ha molts tipus de jocs. D'entrada es divideixen en no cooperatius i cooperatius.

Joc no cooperatiu:

Estudien el comportament dels agents en qualsevol situació en què l'elecció o estratègia òptima de cada jugador depèn del seu pronàstic sobre les eleccions dels altres jugadors. Vol maximitzar els seus propis interessos sense preocupar-se dels interessos dels altres.

Joc cooperatiu:

Quan en el joc hi ha comunicació entre els jugadors amb la finalitat de negociar o establir acords que permetin la formació de coalicions. En aquests casos és habitual considerar com a informació bàsica la utilitat que cada coalició pot obtenir coordinant les estratègies dels seus integrants independentment de l'actuació de la resta dels agents del joc.

Jocs cooperatius amb utilitat transferible (TU):
Són jocs que descriuen el repartiment d'un bé entre m agents. Podem interpretar aquest repartiment com un repartiment d'utilitats quan són lineals en la quantitat del bé. Se suposa l'existència d'un bé que es pot dividir com es vulgui i que és equiparable a les preferències de cada jugador.

Jocs cooperatius amb utilitat no transferible (NTU):
Quan no es té l'existència d'aquest bé (el cas més general) o bé no és sempre igual a les preferències de cada jugador.

Exemple: Cooperació entre municipis. Tenim, A, B, C, tres municipis situats al costat d'un riu, que necessiten construir una depuradora. Si actuen per separat els costos en milers d'euros seran:

$$c(A) = 5.000, \ c(B) = 3.000, \ c(C) = 5.000$$

El municipi B té la meitat de demanda d'aigua que A i C.
Suposem, per simplificar, que l'aigua del riu flueix de manera natural de $A \to B \to C$ i que és econòmicament descartable bombejar l'aigua riu amunt. Poden cooperar i construir una depuradora única pels tres i canalitzar l'aigua des de A cap als altres. A i B són més pròximes entre si i C està més allunyada.

Si cooperen els costos són:

cost depuradora conjunta $= 8.000$

cost canalització $A \to B = 1.000$

cost canalització $B \to C = 1.500$

cost TOTAL si actuen juntament $= 10.500$

Observació: $c(A) + c(B) + c(C) = 13.000 \geq c(ABC) = 10.500$; per tant, cooperar és beneficiós, encara que tot depèn de com es reparteixin els costos entre els municipis.
Analitzem diferents maneres de repartir aquests costos cooperativament.

Mètode 1: Proporcional al número de participants, tots paguen el mateix.

$$x_A = x_B = x_C = \frac{10.500}{3} = 3.500$$

Observem que $x_B = 3.500 > c(B) = 3.000$!!!!!; per tant, és una distribució inacceptable per a B.

Mètode 2: Proporcional a l'ús de la infraestructura. Cada municipi pagarà proporcionalment a l'ús de cada part de la infraestructura de l'obra.
$y_A = 2/5\ (8.000) = 3.500$ (cost de la depuradora)
$y_B = 1/5\ (8.000) + 1/3\ (1.000) = 1.933,3$ (cost de la depudradora + cost del canal de A a B)
$y_C = 2/5\ (8.000) + 2/3\ (1.000) + 1\ (1.500) = 5.366,7$ (cost de la depuradora + cost del canal de A a B + cost del canal de B a C)

Observem que $y_C = 5.366,7 > c(C) = 5.000$!!!!!; per tant, és una distribució inacceptable per a C.

Avaluem la posició dels municipis davant el problema cooperatiu. Ampliem la informació i avaluem els costos si cooperen parcialment; és a dir, dos municipis:

- $c(AB) = 5.500 + 500 = 6.000$ (cost depuradora conjunta per a A i B + cost de canalitzar de A a B)
- $c(BC) = 5.500 + 1.500 = 7.000$ (cost depuradora conjunta per B i C + cost de canalitzar de B a C)
- $c(AC) = c(A) + c(C) = 5.000 + 5.000 = 10.000$. Suposem que l'opció de cooperar A i C sense B és econòmicament descartable ja que B impedeix el pas de la canalització. En aquest cas han d'actuar per separat.

$$c(A) = 5.000, \;\; c(B) = 3.000, \;\; c(C) = 5.000,$$

$$c(AB) = 6.000, \; c(AC) = 10.000, \; c(BC) = 7.000,$$

$$c(ABC) = 10.500$$

Mètode 3: Cada municipi paga proporcionalment a la demanda d'aigua.

$z_A = z_C = 2/5\ (c(ABC)) = 2/5\ 10.500 = 4.200$
$z_B = 1/5\ (c(ABC)) = 1/5\ 10.500 = 2.100$

Observem que $z_A = z_C < c(A) = c(C) = 5.000$ i $z_B < c(B) = 3.000$; per tant, és una distribució que incentiva la coopearció des d'una òptica individual. Però, $z_A + z_B = 4.200 + 2.100 = 6.300 > c(AB) = 6.000$!!!; per tant, si se seguís aquest mètode A i B preferirien no col·laborar amb C.

Mètode 4: Cada municipi paga la part proporcional dels costos globals segons els seus costos individuals.
Recordem que teníem $c(A) = c(C) = 5.000$, $c(B) = 3.000$; per tant, $c(A) + c(B) + c(C) = 13.000$

$w_A = w_C = \frac{5.000}{13.000}\,(c(ABC)) = 5/13\ 10.500 = 4.038,5$

$w_B = \frac{3.000}{13.000}\,(c(ABC)) = 3/13\ 10.500 = 2.423$

Observem que $w_A = w_C < c(A) = c(C) = 5.000$ i $w_B < c(B) = 3.000$, però $w_A + w_B = 6.461,5 > c(AB) = 6.000$; per tant, la coalició $\{A, B\}$ té incentius per no cooperar amb C.

Mètode 5: Proporcional als costos marginals. Els marginals avaluen per cada municipi els costos directament associats a ell és a dir, quina és la part total del cost que la seva presència ha fet afegir.

$m_A = c(ABC) - c(BC) = 10.500 - 7.000 = 3.500$
$m_B = c(ABC) - c(AC) = 10.500 - 10.000 = 500$
$m_C = c(ABC) - c(AB) = 10.500 - 6.000 = 4.500$

Si $m_A + m_B + m_C = c(ABC)$ el repartiment seria posible, però en aquest cas, $m_A + m_B + m_C = 8.500 < c(ABC) = 10.500$ per tant, el repartiment no és possible ja que no cobreix els costos totals. Fem un repartiment proporcional a aquests costos marginals:

$t_A = \frac{3.500}{8.500}\,(c(ABC)) = 4.323,5$
$t_B = \frac{500}{8.500}\,(c(ABC)) = 627,7$
$t_C = \frac{4.500}{8.500}\,(c(ABC)) = 5.558,8 > c(C) = 5.000!!!$; per tant, és inacceptable per a C.

La cooperació aporta reducció de costos o genera beneficis. Això dóna lloc al problema de: com podem repartir els guanys generats per la coalició? La teoria de jocs cooperatius proposa solucions a aquests repartiments. Volem un repartiment $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ per tal que els municipis col·laborin. Caldrà que:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 10.500 \\ a &\leq 5.000 \\ b &\leq 3.000 \\ c &\leq 5.000 \\ a + c &\leq 10.000 \\ a + b &\leq 6.000 \\ b + c &\leq 7.000 \end{aligned}$$

$N = \{1, 2 \dots n\}$ conjunt de jugadors (o agents).
2^N = conjunt de subconjunts de N, inclòs el buit ($\emptyset$).
$S, T, R \dots$ coalicions o subconjunts de jugadors.
$s = |S|$ és el nombre de jugadors de la coalició S.
$\emptyset$ = coalició sense jugadors.
Definició: Un joc cooperatiu en forma característica és un parell ordenat (N, v) en què:

- $N = \{1 \dots n\}$ conjunt de jugadors.
- v és la funció característica:

$$\begin{aligned} v : &2^N \longrightarrow \mathbf{R} \\ &S \longrightarrow v(S),\ \forall S \subseteq N,\ \text{ i } v(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

$v(S)$ és el valor de la coalició S en el joc i indica la utilitat que la coalició S pot assolir pels seus propis mitjans.

Exemple

Un pagès és propietari d'una vaca que pot vendre al mercat obtenint una unitat de benefici. Per transportar-la ha de passar pel terreny d'un dels seus dos veïns.
Jugador 1: el pagès, propietari de la vaca.
Jugador 2: veí, propietari del terreny.
Jugador 3: veí, propietari del terreny.
Cadascun dels jugadors individualment no pot obtenir cap benefici atès que el propietari de la vaca no pot vendre i els veïns no la tenen. Cal la cooperació del propietari amb almenys un veí per tal d'obtenir el guany d'una unitat. La funció característica serà:

$$v(1) = 0, \quad v(2) = 0, \quad v(3) = 0,$$
$$v(12) = 1, \quad v(13) = 1, \quad v(23) = 0,$$
$$v(123) = 1$$

Exemple

Altres problemes poden donar lloc a la mateixa funció característica, com per exemple aquest joc de votació:
Tenim un sistema de votació entre tres jugadors on la decisió s'adopta si hi ha majoria simple (almenys dos vots) i el jugador 1 vota a favor.
Representarem amb un 1 la coalició guanyadora i amb un zero la que no ho és

$$v(1) = 0, \quad v(2) = 0, \quad v(3) = 0,$$
$$v(12) = 1, \quad v(13) = 1, \quad v(23) = 0,$$
$$v(123) = 1$$

Un dels problemes que podem trobar és el de l'assignació de costos. En aquests casos, el valor numèric de la coalició representa el cost conjunt associat als membres de la coalició en realitzar un projecte. El problema és repartir-se els costos comuns, $c(S)$, entre els diferents agents de la coalició.

$$\begin{aligned} c :& 2^N \longrightarrow \mathbf{R} \\ & S \longrightarrow c(S), \ \forall S \subseteq 2^N, \text{ i } c(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

Exemple: El joc de la depuradora vist anteriorment:

$$c(1) = 5.000, \quad c(2) = 3.000, \quad c(3) = 5.000,$$
$$c(12) = 6.000, \quad c(13) = 10.000, \quad c(23) = 7.000,$$
$$c(123) = 10.500$$

Definició: El joc d'estalvis associat a un joc de costos (N, c) es defineix com:

$$v_0(S) = \Big(\sum_{i \in S} c(i) \Big) - c(S), \;\; \forall\, S \subseteq N, \;\; v_0(\emptyset) = 0$$

$v_0(S)$ és l'estalvi de la coalició S respecte a la realització de projectes independents en solitari per part de cada jugador i de la coalició.

Exemple

Exemple: Joc d'estalvis associat al joc de la depuradora:

$$
\begin{aligned}
v_0(1) &= v_0(2) = v_0(3) = 0,\\
v_0(12) &= c(1) + c(2) - c(12) = 5.000 + 3.000 - 6.000 = 2.000,\\
v_0(13) &= c(1) + c(3) - c(13) = 5.000 + 5.000 - 10.000 = 0,\\
v_0(23) &= c(2) + c(3) - c(23) = 3.000 + 5.000 - 7.000 = 1.000,\\
v_0(123) &= c(1) + c(2) + c(3) - c(123) =\\
&= 5.000 + 3.000 + 5.000 - 10.500 = 2.500
\end{aligned}
$$

Observació: El joc d'estalvis sempre és 0-normalitzat, és a dir, amb valors individuals zero.

Exemples

Observació: Tot joc de costos té associat un joc d'estalvis, però no tot joc d'estalvis té associat un joc de costos.

Exemple: $N = \{1, 2\}$

$$c(1) = 700.000, \ c(2) = 400.000,$$
$$c(12) = 1.000.000$$

$$\downarrow$$

$$v_0(1) = 0, \ v_0(2) = 0,$$
$$v_0(12) = 700.000 + 400.000 - 1.000.000 = 100.000$$

Exemple: $N = \{1, 2\}$

$$c(1) = 100.000, \ c(2) = 200.000,$$
$$c(12) = 200.000$$

Són jocs de costos diferents que donen lloc al mateix joc d'estalvi.

Definició: Denotem per a G^N el conjunt dels jocs cooperatius TU de n jugadors (n finit).

Definició: Un joc $(N, v) \in G^N$ és positiu $\Leftrightarrow v(S) \geq 0, \ \forall S \subseteq N$.

Definició: Un joc $(N, v) \in G^N$ és monòton $\Leftrightarrow \forall S, T \subseteq N$ si $S \subseteq T \Rightarrow \ v(S) \leq v(T)$.

Observació: Si un joc $(N, v) \in G^N$ és monòton, llavors és positiu.

Definició: Un joc $(N, v) \in G^N$ és superadditiu $\Leftrightarrow \forall S, T \subseteq N$ si $S \cap T = \emptyset$ llavors, $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$; és a dir, si la unió de coalicions que no tenen jugadors en comú és beneficiosa.

Definició: Un joc $(N, v) \in G^N$ és additiu $\Leftrightarrow \forall S, T \subseteq N$ si $S \cap T = \emptyset$ llavors, $v(S) + v(T) = v(S \cup T)$.

Definició: Un joc $(N, v) \in G^N$ és convex $\Leftrightarrow \forall i \in N, \ \forall S, T \subseteq N$ si $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$:

$$v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T).$$

És a dir, si la contribució marginal del jugador i a la coalició S és menor que la contribució marginal de i a la coalició T.

Jocs de votació

Definició: Un joc $(N, v) \in G^N$ és simple $\Leftrightarrow v(S) \in \{0, 1\}\ \forall S \subseteq N$.

Exemple: $N = \{1, 2, 3, 4\}$, el jugador 1 és el president i els altres tres són consellers. Per aprovar una proposta han de votar a favor el president i dos consellers. Per tant:

$$v(S) = 0, \text{ si } |S| \leq 2$$

$$v(123) = v(134) = v(124) = v(1234) = 1$$

$$v(234) = 0$$

Observació: Els jocs de votació són jocs simples.

Jocs de bancarrota

Exemple: Una empresa ha fet fallida i ha deixat un patrimoni E de 10.000 euros. Hi ha quatre creditors amb uns drets sobre el patrimoni de diferents valors $d_1 = 3.000,\ d_2 = 2.000,\ d_3 = 5.000,\ d_4 = 8.000$, també expressats en euros. El conjunt de jugadors són els creditors $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Tots junts poden quedar-se el total del patrimoni; per tant, $v(N) = 10.000$. Cada coalició $S \subseteq N$ pot quedar-se amb el patrimoni si paga els deutes que reclamen els agents que no són a la coalició; per tant, $v(S) = \max\{0, E - \sum_{i \in N\setminus\{S\}} d_i\}$.

Exercici: Calculeu la funció característica del joc i comproveu que és un joc convex.

Observació: Els jocs de bancarrota sempre són convexos.

Conjunt de preimputacions

El problema que es planteja és: com distribuir el resultat de la cooperació, el valor $v(N)$, entre els n jugadors?

Associarem a cada jugador i un nombre real x_i que es pot representar per un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

Denotarem per a $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, on $x(\emptyset) = 0$.

Definició: Anomenarem conjunt de preimputacions d'un joc $v \in G^N$ al conjunt de totes les distribucions possibles:

$$I^*(v) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x(N) = v(N)\}.$$

La condició que $x(N) = v(N)$ s'anomena principi d'eficiència.

Conjunt d'imputacions

És raonable pensar que cap jugador acceptarà menys del que obtindria per ell sol, sense coalicionar-se amb ningú, és a dir $x_i \geq v(i)$, aquesta condició s'anomena racionalitat individual.

Definició: Anomenarem conjunt d'imputacions d'un joc $v \in G^N$:

$$I(v) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i \geq v(i) \ \ \forall i = 1, \ldots, n \text{ i } \ x(N) = v(N)\}$$

Conjunt d'imputacions

Observació: $I^*(v) \neq \emptyset$ sempre, mentre que $I(v)$ pot ser buit. Per exemple, $N = \{1,2,3\}$, $v(1) = 1$, $v(2) = 2$, $v(3) = 3$, $v(N) = 5$; independentment dels valors de les coalicions de dos jugadors les següents relacions són incompatibles:

$x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3 \ \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$ i $x_1 + x_2 + x_3 = 5$!!!

Condició necessària i suficient per tal que el conjunt d'imputacions sigui no buit:

Proposició: Si tenim que $v \in G^N$

$$I(v) \neq \emptyset \ \Leftrightarrow \ v(1) + v(2) + \ldots + v(n) \leq v(N)$$

Aquests jocs s'anomenen essencials.

Conjunt d'imputacions

Exemple: $N = \{1, 2, 3\}$,
$v(1) = v(2) = v(3) = 0,\ v(12) = v(13) = v(23) = 2,\ v(N) = 10.$
Conjunt de preimputacions: $I^*(v) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 10\}$

Conjunt d'imputacions:
$I(v) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 10,\ x_i \geq 0,\ \forall i = 1, 2, 3\}$
En el cas dels jocs de tres jugadors s'acostuma a representar el conjunt d'imputacions directament al pla, formant un triangle on la suma de les tres coordenades és constant igual a $v(N)$. Els punts que satisfan $x_i = k$ formen rectes paral·leles als costats del triangle que representa el conjunt d'imputacions. Tenint en compte això podem representar qualsevol imputació.
Exercici: Representeu el conjunt d'imputacions i la imputació $(3, 4, 3)$ per al joc de l'exemple anterior.

El concepte de *core* va ser introduit inicialment per Gillies (1953). El *core* és aquell conjunt de pagaments que són eficients i individualment racionals en els quals **cada coalició rep almenys el seu valor**.

Recordem l'exemple del joc de cooperació entre els municipis. Havíem analitzat diversos repartiments i tots ells tenien algun problema des de l'òptica cooperativa ja que alguna coalició sempre sortia perdent en cooperar. Per tant, cal buscar repartiments que a més de ser individualment racionals i eficients siguin coalicionalment racionals.

Usualment es treballa amb la funció característica en termes de guanys, per això associem un joc d'estalvis al joc de costos tal com havíem vist. El joc d'estalvis associat a l'exemple de la depuradora:

$$\begin{aligned} v_0(1) = v_0(2) = v_0(3) &= 0, \\ v_0(12) &= 2.000, \\ v_0(13) &= 0, \\ v_0(23) &= 1.000, \\ v_0(123) &= 2.500 \end{aligned}$$

Voldríem trobar distribucions $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ de l'estalvi total que satisfacin:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 2.500, \ \text{(eficiència)} \\
x_1 &\geq 0, \ \text{(racionalitat individual)} \\
x_2 &\geq 0, \\
x_3 &\geq 0, \\
x_1 + x_2 &\geq 2.000, \ \text{(racionalitat coalicional)} \\
x_1 + x_3 &\geq 0, \\
x_2 + x_3 &\geq 1.000
\end{aligned}
$$

D'aquí podem deduir que: $x_3 \leq 500$, $x_2 \leq 2.500$, $x_1 \leq 1.500$. Per tant, el *core* serà el conjunt de punts que compleixi aquestes condicions:

$$C(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \ | 0 \leq x_1 \leq 1.500, 0 \leq x_2 \leq 2.500, 0 \leq x_3 \leq 500\}$$

Observacions:

- Amb l'obtenció del conjunt d'imputacions que compleixen la racionalitat coalicional hem "resolt" el joc anterior v_0. Per exemple, $x = (1.500, 500, 500) \in C(v_0)$ podria ser una solució acceptable. En passar-la als costos seria: $y_A = c(A) - x_A = 3.500$, $y_B = c(B) - x_B = 2.500$, $y_C = c(C) - x_C = 4.500$.
- En aquest exemple hi ha infinites imputacions que són del *core*, quan passa això cal buscar un procediment adient de selecció.
- En el cas de tres jugadors sempre es pot reperesentar el *core* dins el triangle d'imputacions i s'obté un polígon.

El *core* també pot ser un únic punt; per exemple:

$$\begin{aligned} v(1) = v(2) = v(3) &= 0, \\ v(12) &= 2.000, \\ v(13) &= 2.000, \\ v(23) &= 1.000, \\ v(123) &= 2.500 \end{aligned}$$

Els punts del *core* han de complir:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 2.500, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 2.000, \\ x_1 + x_3 \geq 2.000, \\ x_2 + x_3 \geq 1.000 \end{gathered}$$

Sumant les desigualtats tenim:

$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 5.000 \;\Rightarrow\; x_1 + x_2 + x_3 \geq 2.500$ i per eficiència:

$$x_1 + x_2 = 2.000,$$
$$x_1 + x_3 = 2.000,$$
$$x_2 + x_3 = 1.000$$

Per tant, hi ha una solució única:

$$C(v) = \{(1.500, 500, 500)\}$$

El *core* també pot ser el conjunt buit, per exemple:

$$\begin{aligned} v(1) = v(2) = v(3) = 0&, \\ v(12) = 2.000&, \\ v(13) = 2.250&, \\ v(23) = 1.000&, \\ v(123) = 2.500& \end{aligned}$$

Els punts del *core* han de complir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2.500, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0,\ x_3 \geq 0, \\ x_1 + x_2 &\geq 2.000, \\ x_1 + x_3 &\geq 2.250, \\ x_2 + x_3 &\geq 1.000 \end{aligned}$$

Sumant les desigualtats tenim:

$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 5.250 \;\Rightarrow\; x_1 + x_2 + x_3 \geq 2.625$ i, per eficiència, $x_1 + x_2 + x_3 = 2.500$!!! És una contradicció!; per tant, $C(v) = \emptyset$.

Observació: Hem vist que el *core* pot tenir infinits punts, un punt o ser buit. Mai podrà tenir un nombre finit de punts més gran que un. És un conjunt polièdric, tancat i afitat.

Definició: Anomenem contribució marginal del jugador i a la coalició total a $b_i^v = v(N) - v(N \setminus \{i\})$, l'aportació del jugador i quan s'afegeix a la coalició $N \setminus \{i\}$ per formar la coalició total.

Proposició: Si $(N, v) \in G^N$ i:
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C(v) \;\Rightarrow\; v(i) \leq x_i \leq v(N) - v(N \setminus \{i\})$, per tot $i \in N$.

El jugador i pot demanar que se li pagui la seva contribució marginal, no més perquè trencaria la cooperació.
Si tots els jugadors demanen la seva contribució marginal, en general, tenim una distribució $(b_1^v, \ldots, b_n^v)$ que no és eficient.

Proposició: Si $(N, v) \in G^N$ amb $C(v) \neq \emptyset$ i el vector de contribucions marginals $(b_1^v, \ldots, b_n^v)$ és eficient, llavors és l'únic punt del *core*.

És a dir, si existeixen elements del *core* del joc i les contribucions marginals formen una distribució eficient, llavors aquesta és l'única possibilitat de repartir els guanys cooperativament. No obstant això, el *core* d'un joc pot ser un únic punt i que aquest no sigui el vector de contribucions marginals. Vegem-ne un exemple.

Exemple: $N = \{1, 2, 3\}$,
$v(1) = 1$, $v(2) = 2$, $v(3) = 3$, $v(12) = 2$, $v(13) = 4$, $v(23) = 5$,
$v(123) = 6$
El *core* és: $c(v) = \{(1, 2, 3)\}$ i les contribucions marginals:

$$\begin{aligned} b_1^v &= v(123) - v(23) = 6 - 5 = 1 \\ b_2^v &= v(123) - v(13) = 6 - 4 = 2 \\ b_3^v &= v(123) - v(12) = 6 - 2 = 4 \end{aligned}$$

Tenim que $\sum b_i^v = 7 \neq v(123)$ no és eficient; per tant, $(b_1^v, b_2^v, b_3^v) = (1, 2, 4)$ no pertany al *core* del joc. El *core* és un únic punt i no és el de les contribucions marginals.

Teorema: Si $(N, v) \in G^N$:

- El *core* de v és un conjunt convex, tancat i afitat de $\mathbf{R}^n$: de fet, és un poliedre convex i compacte.
- I el *core* és no buit, llavors existeixen $x_1, \ldots, x_k \in C(v)$, els punts extrems, de manera que qualsevol altre punt x del *core* és una ponderació d'aquests punts; és a dir:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots \lambda_k x_k, \text{ per } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$$

$$\text{tals que } \lambda_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ i } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Exemple: $N = \{1, 2, 3\}$,
$v(1) = v(2) = v(3) = 0, \ v(12) = v(13) = v(23) = 1, \ v(123) = 3$

$$C(v) = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 3, \ x_i \geq 0, \ \forall i \in N$$
$$x_1 + x_2 \geq 1, \ x_1 + x_3 \geq 1, \ x_2 + x_3 \geq 1\}$$

Què passa si el *core* és buit? Podem seguir cooperant?

Exemple: $N = \{1, 2, 3\}$,
$v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = v(13) = v(23) = 8$, $v(123) = 9$

Aquest joc té el *core* buit, és superadditiu i monòton. Per tant, en ser superadditiu i monòton això ens indica que ens interessa cooperar ja que per monotonia en augmentar el tamany de la coalició augmentem els beneficis i per la superadditivitat la unió de coalicions que no tenen elements comuns és beneficiosa.
Per tant, cooperar $\Rightarrow$ benefici. Caldrà buscar altres solucions cooperatives que no siguin el *core*.

Si el *core* és no buit, sempre intentarem buscar una solució del *core*?

Recordem l'exemple dels tres pagesos que un té una vaca i els altres dos tenen terrenys per als que s'ha de passar per anar a vendre la vaca. $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = v(13) = 1, v(23) = 0$, $v(123) = 1$. El *core* és $C(v) = \{(1, 0, 0)\}$, proposa una única solució que serà inacceptable per als jugadors 2 i 3. Per tant, caldrà buscar altres solucions.

S'espera de la teoria de jocs que ens aporti alguna "solució" que sigui més o menys equitativa per als diferents problemes de guanys o costos.

Fins ara hem analizat una solució conjuntista que és el *core*. Podem pensar que el *core* d'un joc és el conjunt de distribucions em què cap coalició rep incentius per trencar la cooperació.

Amb aquest tema encetem l'estudi de dues solucions puntuals característiques de la teoria de jocs que són:

1. El valor de Shapley (Shapley, 1953)
2. El nucleòlus (Schmeidler, 1969)

Recordem què és una solució d'un joc cooperatiu d'utilitat transferible (N, v).

Definició: Una solució α és una regla que assigna a cada joc cooperatiu un vector $\alpha(v) = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, en el qual α_i indica el pagament al jugador i, de manera que el guany o el cost total sigui totalment distribuït o imputat entre els jugadors; és a dir, $\alpha_1 + ... + \alpha_n = v(N)$.

Pel que fa refèrencia a les solucions, cal tenir en compte que:

i. Una solució no és una imposició sinó una recomanació.
ii. És important posar de manifest els principis o axiomes que verifica la solució.

Per tant:

Una solució pot ser una bona proposta per a un determinat problema, però no per a un altre.

$$\Downarrow$$

La solució mai s'ha de deslligar del problema inicial.

- Començarem analizant el principi de marginalitat, fonamental per entendre la solució que proposa Sharpley.
- Analitzarem el cas més senzill de tres jugadors.
- Definirem el valor de Shapley.
- N'analitzarem les propietats.
- Farem l'aproximació axiomàtica de la solució.

Els vectors de contribucions marginals

Quan un jugador i s'incorpora a una coalició S podem dir que:

"L'aportació del jugador i a la coalició S és $v(S \cup \{i\}) - v(S)$".

aquest valor dóna molta informació:

- Si $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ és gran $\Rightarrow$ el pes o la importància del jugador i en la coalició és gran.

Per tant, això dóna informació al jugador i de la quantitat que pot reclamar al repartiment.

Si reclama una quantitat superior a la seva aportació la coalició S podria rebutjar la seva col·laboració.

El valor $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ dóna informació de fins a on un jugador pot arribar amb les seves demandes.

Definició: Si tenim un joc (N, v), una coalició $S \subseteq N$ i un jugador $i \notin S$, anomenarem **contribució marginal** del jugador i a la coalició $S \cup \{i\}$ al valor: $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

Suposem que es forma la coalició total N i que els jugadors es van incorporant a la coalició en un cert ordre $\sigma = (i_1, i_2 ..., i_n)$

en el qual i_j és el jugador que ha entrat a la coalició en el lloc j-èssim.

Amb aquestes hipòtesis podrem calcular el benefici marginal que genera cada jugador durant aquest procés de formació de la coalició N.

Exemple: $N = \{1, 2, 3, 4, 5\} \leftarrow$ conjunt de jugadors.

$\sigma = (5, 1, 3, 4, 2)$

$i_1 = 5 \Longrightarrow$ el jugador 5 entra en el primer lloc

$i_2 = 1 \Longrightarrow$ el jugador 1 entra en el segon lloc

$i_3 = 3 \Longrightarrow$ el jugador 3 entra en el tercer lloc

$i_4 = 4 \Longrightarrow$ el jugador 4 entra en el quart lloc

$i_5 = 2 \Longrightarrow$ el jugador 2 entra en el cinquè lloc

Definició: Si tenim un joc (N, v) i una ordenació $\sigma = (i_1, ..., i_n)$ de N. Direm **vector de contribucions marginals** del joc v asociat a l'ordenació σ el vector $m^\sigma(v) \in \mathbb{R}^n$ en què:

$m^\sigma_{i_1}(v) = v(i_1)$

$m^\sigma_{i_2}(v) = v(i_1 i_2) - v(i_1)$

$m^\sigma_{i_3}(v) = v(i_1 i_2 i_3) - v(i_1 i_2)$

. . . .

$m^\sigma_{i_n}(v) = v(i_1 ... i_n) - v(i_1 ... i_{n-1})$

Exemple: $N = \{1, 2, 3\} \quad \sigma = (3, 1, 2)$

$$m_3^\sigma(v) = v(3)$$

$$m_1^\sigma(v) = v(31) - v(3)$$

$$m_2^\sigma(v) = v(312) - v(31)$$

$$\Downarrow$$

$$m^\sigma(v) = (\underbrace{v(31) - v(3)}_{m_1^\sigma}, \underbrace{v(123) - v(31)}_{m_2^\sigma}, \underbrace{v(3)}_{m_3^\sigma})$$

Exercici: $N = \{1,2,3,4,5\}$ i l'ordenació $\sigma = (5,1,4,3,2)$

$$\Rightarrow m^\sigma(v) = ?$$

$$m^\sigma(v) = (\underbrace{v(15) - v(5)}_{m_1^\sigma}, \underbrace{v(12345) - v(1345)}_{m_2^\sigma},$$

$$\underbrace{v(1345) - v(145)}_{m_3^\sigma}, \underbrace{v(145) - v(15)}_{m_4^\sigma}, \underbrace{v(5)}_{m_5^\sigma})$$

El nombre d'ordenacions d'un conjunt de n jugadors és $n!$ Per tant, per tot joc cooperatiu (N, v) tenim $n!$ vectors de contribucions marginals.

Per exemple:

- Si $N = \{1,2,3\} \Rightarrow n! = 3 * 2 * 1 = 6$
- Si $N = \{1,2,3,4\} \Rightarrow n! = 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$

Per tant, per $n = 3$ jugadors tenim 6 vectors de contribucions marginals.

Construïm-los:

$$\sigma_1 = (1,2,3) \Longrightarrow m^{\sigma_1}(v) = (v(1), v(12) - v(1), v(123) - v(12))$$

$$\sigma_2 = (1,3,2) \Longrightarrow m^{\sigma_2}(v) = (v(1), v(123) - v(13), v(13) - v(1))$$

$$\sigma_3 = (2,1,3) \Longrightarrow m^{\sigma_3}(v) = (v(12) - v(2), v(2), v(123) - v(12))$$

$$\sigma_4 = (2,3,1) \Longrightarrow m^{\sigma_4}(v) = (v(123) - v(23), v(2), v(23) - v(2))$$

$$\sigma_5 = (3,1,2) \Longrightarrow m^{\sigma_5}(v) = (v(13) - v(3), v(123) - v(13), v(3))$$

$$\sigma_6 = (3,2,1) \Longrightarrow m^{\sigma_6}(v) = (v(123) - v(23), v(23) - v(3), v(3))$$

Es pot donar el cas que alguns d'aquests vectors coincideixin.

Exemple: El joc dels inversors

$N = \{1, 2, 3\}$ Cada jugador aporta un capital de $1,5$, $1,5$ i 3 milions per finançar un projecte que generarà uns beneficis del 10% sobre el capital invertit.

Suposem que el projecte admet diversos nivells d'inversió, però que requereix com a mínim 4 milions. Per tant, els guanys de les coalicions en milers seran:

$v(13) = v(23){=}450$, $v(N){=}600$ i $v(S) = 0$ per a la resta de coalicions ja que no arriben als 4 milions.

Analitzem les contribucions marginals del jugadors a la coalició N:

Teníem:

$v(N)$=600
$v(13)$=$v(23)$=450
$v(S)$=0 per a la resta

$m_1(v) = v(N) - v(N \setminus \{1\})$=600-450=150
$m_2(v) = v(N) - v(N \setminus \{2\})$=600-450=150
$m_3(v) = v(N) - v(N \setminus \{3\})$=600-0=600

$$\Downarrow$$

Si assignem a cada jugador la seva contribució marginal estem repartint més del benefici total generat! No pot ser.

$m_1(v) + m_2(v) + m_3(v) = 150 + 150 + 600 = 900 > v(N) = 600$!!!

Això no pot ser una solució.

Per evitar aquest problema suposarem que els jugadors s'incorporen amb un cert ordre i que la mesura de l'aportació de cada jugador s'ha de fer en el moment de la seva incorporació.

Per exemple, agafem $\sigma = (3, 1, 2)$ com a ordre.

$$\Downarrow$$

$m_3^\sigma = v(3) = 0 \leftarrow$ És el primer d'aportar els diners.
$m_1^\sigma = v(13) - v(3) = 450 - 0 = 450 \leftarrow$ El que va després del jugador 3.
$m_2^\sigma = v(123) - v(13) = 600 - 450 = 150 \leftarrow$ L'últim.

Si ara asignem a cada jugador la seva contribució marginal segons σ:

$$m^\sigma = (450, 150, 0) \quad 540 + 150 + 0 = 600 = v(N)$$
$$\Downarrow$$

Ara és eficient, però depèn d'una ordenació dels jugadors.

Per resoldre aquest problema de l'arbitrarietat de l'ordenació escollida, Shapley proposa una distribució que tingui en compte totes les possibles ordenacions dels jugadors.

Si considerem que cada ordenació té igual probabilitat de ser considerada, el camí lògic per valorar l'aportació d'un jugador és el de **calcular la mitjana de les contribucions marginals del jugador segons les diferents ordenacions**.

Vegem-ho per al cas de 3 jugadors: $N = \{1, 2, 3\}$

	Jugadors		
Ordenacions	**1**	**2**	**3**
$\sigma_1 = (123)$	$v(1)$	$v(12) - v(1)$	$v(123) - v(12)$
$\sigma_2 = (132)$	$v(1)$	$v(123) - v(13)$	$v(13) - v(1)$
$\sigma_3 = (213)$	$v(12) - v(2)$	$v(2)$	$v(123) - v(12)$
$\sigma_4 = (231)$	$v(123) - v(23)$	$v(2)$	$v(23) - v(2)$
$\sigma_5 = (312)$	$v(13) - v(3)$	$v(123) - v(13)$	$v(3)$
$\sigma_6 = (321)$	$v(123) - v(23)$	$v(23) - v(3)$	$v(3)$

Sumem i dividim per 6 cada component, tenim:

$$\phi_1(v) = \frac{2v(1)}{6} + \frac{v(12)-v(2)}{6} + \frac{v(13)-v(3)}{6} + \frac{2(v(123)-v(23))}{6}$$

I fent el mateix per als altres, tenim:

$$\phi_1(v) = \frac{v(1)}{3} + \frac{v(12)-v(2)}{6} + \frac{v(13)-v(3)}{6} + \frac{v(123)-v(23)}{3}$$

$$\phi_2(v) = \frac{v(2)}{3} + \frac{v(12)-v(1)}{6} + \frac{v(23)-v(3)}{6} + \frac{v(123)-v(13)}{3}$$

$$\phi_3(v) = \frac{v(3)}{3} + \frac{v(13)-v(1)}{6} + \frac{v(23)-v(2)}{6} + \frac{v(123)-v(12)}{3}$$

El vector $\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \phi_3(v))$ és el **VALOR DE SHAPLEY** per al cas de 3 jugadors.

Si l'apliquem a l'exemple anterior tenim:

	Jugadors		
Ordenacions	**1**	**2**	**3**
$\sigma_1 = (1,2,3)$	0	0	600
$\sigma_2 = (1,3,2)$	0	150	450
$\sigma_3 = (2,1,3)$	0	0	600
$\sigma_4 = (2,3,1)$	150	0	450
$\sigma_5 = (3,1,2)$	450	150	0
$\sigma_6 = (3,2,1)$	150	450	0
total	750	750	2.100
mitjana $\phi(v)$	$\frac{750}{6}$	$\frac{750}{6}$	$\frac{2.100}{6}$

Per tant: $\boxed{\phi(v) = (125, 125, 350)}$

Recordem l'exemple dels inversors:

$N = \{1, 2, 3\}$ capitals $\longrightarrow$ 1,5, 1,5, 3

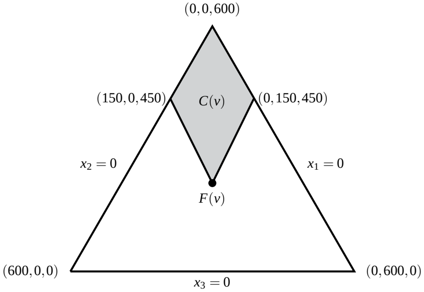
$v(13) = 450$
$v(23) = 450$
$v(N) = 600 \quad v(S) = 0$ per a la resta

$$\phi(v) = (\underbrace{125, 125}_{\boxed{\begin{array}{c}\text{8,3\% del capital}\\ \text{invertit que és}\\ \text{1,5 milions}\\ \frac{1.500.000}{100} * 8.\overline{3} = 125.000\end{array}}} \underbrace{, 350}_{\boxed{\begin{array}{c}\text{11,6\% del capital}\\ \text{invertit que és}\\ \text{3 milions}\\ \frac{3.000.000}{100} * 11.\overline{6} = 350.000\end{array}}})$$

Si examinem el *core* d'aquest joc veiem:

$$C(v) = \left\{ \begin{array}{c|cc} x \in I(v) & x_1 + x_2 \geqslant 0 & x_1 + x_3 \geqslant 450 \\ & x_2 + x_3 \geqslant 450 & x_1 + x_2 + x_3 = 600 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c|cc} x \in I(v) & x_2 \leq 150, & x_1 \leq 150 \\ & & x_3 \leq 600 \end{array} \right\}$$



Podem veure que $\phi(v) \in C(v)$.

Fins ara hem fet exemples on el que es distribuïa eren guanys. Per als jocs de costos es defineix el valor de Shapley de la mateixa manera. Vegem-ne un exemple.

Exemple:

Considerem tres establiments comercials A, B i C, que decideixen agrupar-se i realitzar conjuntament les seves comandes mensuals d'un determinat producte. El proveïdor els ofreix els següents preus unitaris, $p(x)$, depenent del volum de la comanda, en què x indica el nombre d'unitats demanades:

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}5 \text{ euros} & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 500 \\ 0{,}4 \text{ euros} & \text{si} \quad 500 \leqslant x < 1.000 \\ 0{,}35 \text{ euros} & \text{si} \quad 1.000 \leqslant x. \end{cases}$$

Les comandes mensuals per cada establiment són 200, 200 i 700, respectivament. La funció característica del joc de costos és:

$$\begin{array}{lll} C(A) = 100 & C(AB) = 200 & \\ C(B) = 100 & C(AC) = 360 & C(ABC) = 385 \\ C(C) = 280 & C(BC) = 360 & \end{array}$$

Si fixem una ordenació $\sigma = (B, A, C)$, per exemple, i els imputem el cost marginal, tindrem que l'assignació serà:

$$\begin{aligned} m^{\sigma}(c) &= (C(AB) - C(B), C(B), C(ABC) - C(AB)) \\ &= (100, 100, 185) \end{aligned}$$

Mirem per a totes les ordenacions els costos marginals $m^{\sigma}(c)$:

	Jugadors		
Ordenacions	**1**	**2**	**3**
$\sigma = (A, B, C)$	100	100	185
$\sigma = (A, C, B)$	100	25	260
$\sigma = (B, A, C)$	100	100	185
$\sigma = (B, C, A)$	25	100	260
$\sigma = (C, A, B)$	80	25	280
$\sigma = (C, B, A)$	25	80	280
total	430	430	1.450
mitjana $\phi(c)$	$71,\overline{6}$	$71,\overline{6}$	$241,\overline{6}$

VALOR DE SHAPLEY $\boxed{\phi(c) = (71,\overline{6}, 71,\overline{6}, 241,\overline{6})}$

Observem que:

- El màxim descompte s'assoleix quan tots tres cooperen. Llavors aconsegueixen el preu de 0,35 € per unitat.
- Els jugadors 1 i 2 junts o separats no aconsegueixen cap descompte, però amb el jugador 3 poden aconseguir el 30% de descompte.

La solució proporcional és:

P(c)=(0,35*200,0,35*200,0,35*700)=(70, 70, 245)

D'aquesta manera no discriminem entre els jugadors i imputem un preu unitari igual per tots de 0,35 €.

El valor de Shapley té en compte les diferències entre els jugadors.

Shapley asigna els preus unitaris següents:

$$\overline{P}_A = \overline{P}_B = 0.,358$$
$$\overline{P}_C = 0,345$$

És un preu proper al de la proporció P=0,35, però discrimina entre els jugadors segons el que hem observat anteriorment.

Definició i propietats

Quan tenim més de 3 jugadors la situació no varia de la que hem descrit fins ara, excepte en el nombre de possibilitats que tenen per ordenar-se.

Per a n jugadors $N = \{1, 2, ..., n\}$ tenim $n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1$ maneres d'ordenar-se.

El valor de Shapley es pot expressar com:

$$\boxed{\phi(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} m^{\sigma}(v)}$$

On S_n és el conjunt de totes les ordenacions possibles i $m^{\sigma}(v)$ representa el vector de contribucions marginals associat.

Definició i propietats

També podem escriure la fórmula per a cada jugador en termes de les seves contribucions marginals.

Definició (Shapley, 1953)

Si (N, v) és un joc cooperatiu d'utilitat transferible, el valor de Shapley es definex com:

$$\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), ...\phi_n(v))$$

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S)[v(S \cup \{i\}) - v(S)] \quad i = 1, ..., n.$$

en què $\gamma(S) = \frac{s!(n-s-1)}{n!}$, i $s = |s|$

$\gamma(S)$ s'anomena coeficient de ponderació.

Definició i propietats

Exemple: Per $n = 4$, el valor de Shapley seria:

$S \subseteq N \setminus \{i\}$, $i = 1 \Rightarrow S \subseteq \{2, 3, 4\}$

$$\phi_1(v) = \frac{\overbrace{v(1)}^{S=\emptyset}}{4} + \frac{\overbrace{1!2!(v(12) - v(2))}^{S=\{2\}}}{4!} + \frac{\overbrace{v(13) - v(3)}^{S=\{3\}}}{12} +$$

$$\frac{\overbrace{v(14) - v(4)}^{S=\{4\}}}{12} + \frac{\overbrace{2!1!(v(123) - v(23))}^{S=\{23\}}}{4!} + \frac{\overbrace{v(124) - v(24)}^{S=\{24\}}}{12} +$$

$$\frac{\overbrace{v(134) - v(34)}^{S=\{34\}}}{12} + \frac{\overbrace{3!0!(v(1234) - v(234))}^{S=\{234\}}}{4!}$$

Definició i propietats

Exercici:

Calculeu $\phi_2(v) = ...$
$\phi_3(v) = ...$
$\phi_4(v) = ...$

Notem que els coeficients que intervenen en l'expresió del valor de Shapley per a cada jugador sumen 1.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = 1$$

Definició i propietats

Exercici:

Calculeu el valor de Shapley del següent joc i estudieu si pertany al *core*:

$N = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{array}{cccc}
v(1) = 0 & v(12) = 0 & & \\
v(2) = 0 & v(13) = 2 & v(123) = 4 & \\
v(3) = 0 & v(14) = 4 & v(124) = 4 & \\
v(4) = 0 & v(23) = 2 & v(134) = 4 & v(N) = 6 \\
v(24) = 4 & v(234) = 4 & & \\
v(34) = 0 & & &
\end{array}$$

Definició i propietats

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S)[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

$$i = 1, \ldots, n \quad \gamma(S) = \frac{s!(n-s-1)!}{n!}$$

$$\phi_1(v) = \frac{\overbrace{v(1)}^{0}}{4} + \frac{\overbrace{v(12)}^{0} - \overbrace{v(2)}^{0}}{12} + \frac{\overbrace{v(13)}^{2} - \overbrace{v(3)}^{0}}{12} + \frac{\overbrace{v(14)}^{4} - \overbrace{v(4)}^{0}}{12} +$$

$$\frac{\overbrace{v(123)}^{4} - \overbrace{v(23)}^{2}}{12} + \frac{\overbrace{v(124)}^{4} - \overbrace{v(24)}^{4}}{12} + \frac{\overbrace{v(134)}^{4} - \overbrace{v(34)}^{0}}{12} + \frac{\overbrace{v(1234)}^{6} - \overbrace{v(234)}^{4}}{4} = \frac{3}{2}$$

...

$$\phi(v) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{6}, \frac{11}{6}\right)$$

Definició i propietats

$$\phi(v) \in C(v)? \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \phi(S) \geq v(S) \quad \forall S \subset N \\ \phi(N) = v(N) \end{array}$$

$$\phi(14) = \phi_1 + \phi_4 = \frac{3}{2} + \frac{11}{6} = \frac{9+11}{6} = \frac{20}{6} \not\geq v(14) = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\phi(v) \notin C(v)$$

Definició i propietats

Observacions:

- El valor de Shapley sempre **selecciona una preimputació** (distribució eficient $\phi(N) = v(N)$), sempre **existeix** i és **únic**.
- No ens assegura que estiguem seleccionant una imputació del joc (no assegura la racionalitat individual).

No obstant això, si el joc és **superadditiu** (condició que es dóna en la majoria de problemes econòmics); és a dir:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T), \quad \forall S, T \subseteq N, \quad S \cap T = \emptyset$$

Podrem garantir la racionalitat individual; és a dir, $\phi_i(v) \geq v(i), i = 1, ..., n.$

Definició i propietats

Proposició:

Si (N, v) és un joc superadditiu $\Rightarrow$ el valor de Shapley $\phi(v)$ és una imputació.

Definició i propietats

Demostració:

$$(N,v) \text{ superadditiu} \quad \Rightarrow v(S)+v(i) \leq v(S\cup\{i\}) \quad \forall i \in N,$$

$$\forall S \subseteq N \setminus \{i\} \quad \Rightarrow v(i) \leq v(S\cup\{i\}) - v(S) = m_i^\sigma(v)$$

Contribució marginal del jugador i per una ordenació σ

$$\Downarrow$$

$$v(i) \leq m_i^\sigma(v)$$

Si això ho sumem $\forall \sigma \in S_n$ tindrem:

$$n! v(i) \leq \sum_{\sigma\in S_n} m_i^\sigma(v)$$

$$\Downarrow$$

$$v(i) \leq \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} m_i^\sigma(v) = \phi_i(v)$$

Per tant, $\phi_i(v) \geq v(i)$.

Definició i propietats

Si no podem garantir que el valor de Shapley seleccioni una imputació, més difícil serà assegurar que, en general, pertanyi al *core* del joc.

Definició: Un joc (N, v) és **convex** si $\forall i \in N$ es compleix que $\forall S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$.

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

És a dir, que per tot jugador les seves contribucions marginals són creixents. En particular, si el joc és de tres jugadors podem dir que serà convex $\iff$ satisfà:

$$\begin{gathered}
v(1) + v(2) \leq v(12) \\
v(1) + v(3) \leq v(13) \\
v(2) + v(3) \leq v(23) \\
v(12) + v(13) \leq v(123) + v(1) \\
v(12) + v(23) \leq v(123) + v(2) \\
v(13) + v(23) \leq v(123) + v(3)
\end{gathered}$$

Definició i propietats

Proposició:

Si (N, v) és un joc convex $\Rightarrow$ el valor de Shapley $\phi(v)$ pertany al *core*.

Demostració:

Per als jocs convexos, els vectors de contribucions marginals són extrems del *core*. (Això ho demostrarem més endavant.)

Com que Shapley és una mitjana d'aquests vectors de contribució marginal $\Rightarrow$ El valor de Shapley pertany al *core*; de fet, ocuparà una posició central dins del *core*.

Definició i propietats

Exercici: Si tenim el joc

$$\begin{array}{lll} v(1) = 0 & v(12) = 1 & \\ v(2) = 0 & v(13) = 2 & v(123) = 4 \\ v(3) = 0 & v(23) = 2 & \end{array}$$

a. Calculeu el valor de Shapley.
b. Distribuïu el conjunt d'imputacions, el *core*, els vectors de contribucions marginals i el valor de Shapley.
c. Comproveu que el joc és convex.

A partir dels vectors de contribucions marginals construïm el mínim conjunt convex que els conté que s'anomena conjunt de Weber.

Definició

Si tenim un joc (N, v), anomenem **conjunt de Weber**, i el denotem per $W(v)$, a les combinacions convexes dels vectors de contribucions marginals.

$$W(v) = \{\sum_{j=1}^{n!} \alpha_j m^{\sigma_j}(v) : 1\alpha_j \geq 0, j = 1, ..., n!, i \sum_{j=1}^{n!} \alpha_j = 1\}$$
$$= convex\{m^{\sigma}(v)\}$$

Observem que:

- $W(v) \neq \emptyset$ (per definició)
- $W(v) \subseteq I^*(v)$ (ja que $m^{\sigma}(N) = v(N)$)

Exemple:

$$\begin{array}{lll} v(1)=0 & v(12)=2 & \\ v(2)=0 & v(13)=1 & v(123)=3 \\ v(3)=0 & v(23)=2 & \end{array}$$

Calculem els vectors de contribucions marginals:

$$\begin{array}{l} \sigma_1=(1,2,3)\rightarrow m^{\sigma_1}=(0,2,1) \\ \sigma_2=(1,3,2)\rightarrow m^{\sigma_2}=(0,2,1) \\ \sigma_3=(2,1,3)\rightarrow m^{\sigma_3}=(2,0,1) \\ \sigma_4=(2,3,1)\rightarrow m^{\sigma_4}=(1,0,2) \\ \sigma_5=(3,1,2)\rightarrow m^{\sigma_5}=(1,2,0) \\ \sigma_6=(3,2,1)\rightarrow m^{\sigma_6}=(1,2,0) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} m^{\sigma_1}=m^{\sigma_2}=(0,2,1) \\ m^{\sigma_3}=(2,0,1) \\ m^{\sigma_5}=m^{\sigma_6}=(1,2,0) \\ m^{\sigma_4}=(1,0,2) \\ \text{4 vectors de contribució} \\ \text{marginal diferents} \end{array}$$

Calculem el *core* del joc:

$$\begin{aligned} x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \quad x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 + x_3 &\geq 1 \\ x_2 + x_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

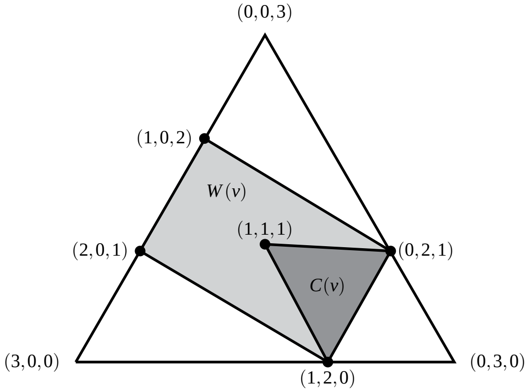
$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{lcl} 3 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 + x_3 & \Rightarrow & x_3 \leq 1 \\ 3 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 + x_2 & \Rightarrow & x_3 \leq 2 \\ 3 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 + x_1 & \Rightarrow & x_3 \leq 1 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$C(v) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ 0 \leq x_3 \leq 1 \end{array} \right\}$$

Gràficament:



$C(v) = convex\{(0,2,1);(1,2,0);(1,1,1)\}$
$W(v) = convex\{(0,2,1);(1,2,0);(2,0,1);(1,0,2)\}$

Observem que: $C(v) \subseteq W(v)$, però no són iguals.

Els marginals que pertanyen al *core* sempre seran punts extrems del *core*.

- Pot ser que cap vector de contribució marginal pertanyi al *core*.
- Pot ser que tots els marginals pertanyin al *core*. En aquest cas, $C(v) = W(v)$. Això passarà per als jocs convexos.

Proposició:

Per a tot joc (N, v) es té:

1. $W(v) \subseteq I^*(v)$
2. Si $m^\sigma(v) \in core(v) \Rightarrow m^\sigma(v)$ és un extrem del *core*.

Teorema:

Per a tot joc (N, v) es compleix $C(v) \subseteq W(v)$.

Quan $C(v) = W(v)$?

Teorema:

Per a tot joc (N, v) es verifica v convex $\Leftrightarrow C(v) = W(v)$.

Per tant, els jocs convexos són els únics que tenen la propietat que el *core* sempre serà no buit i coincidirà amb el conjunt de Weber.

Observem que:

- Com que el valor de Shapley és una ponderació dels vectors de contribució marginals $\Rightarrow$ en general, $\phi(v) \in W(v)$.

  El valor de Shapley és una distribució del conjunt de Weber.

$$\Downarrow$$

- Per als jocs convexos $C(v) = W(v)$; per tant, $\phi(v) \in C(v)$.

El valor de Shapley és invariant respecte als canvis d'escala i d'origen.

Tenim un joc v i el transformem en un altre joc, multiplicant els valors de les coalicions per a $\alpha > 0$ i fem un canvi d'origen a $d = (d_1, ..., d_n) \in R^n$.

$$(\alpha v + d)(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} d_i$$

Llavors, el valor de Shapley del joc inicial i del transformat estaran lligats per la mateixa transformació en el canvi d'escala i d'origen.

Proposició:
Si tenim (N, v), aleshores:

$$\phi(\alpha v + d) = \alpha\phi(v) + d \text{ en que } \alpha > 0 \text{ i } d \in R^n.$$

Exemple:

$$\begin{array}{lll} v(1)=2 & v(12)=3 & \\ v(2)=2 & v(13)=5 & v(123)=10 \\ v(3)=3 & v(23)=8 & \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi(v)=\left(\tfrac{11}{6},\tfrac{20}{6},\tfrac{29}{6}\right)$$

Fem la transformació:

$$\alpha=3, \quad \mathrm{d}(1{,}1{,}1) \quad \Rightarrow v'=\alpha v+d$$

$$v'(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} d_i$$
$$v'(1) = 3v(1) + d_1 = 3 * 2 + 1 = 7 \quad v'(2) = 3v(2) + d_2 = 3 * 2 + 1 = 7$$
$$v'(3) = 3v(3) + d_3 = 3 * 3 + 1 = 10$$
$$v'(12) = 3v(12) + d_1 + d_2 = 3 * 3 + 1 + 1 = 11$$
$$v'(13) = 3v(12) + d_1 + d_3 = 3 * 5 + 1 + 1 = 17$$
$$v'(23) = 3v(23) + d_2 + d_3 = 3 * 8 + 1 + 1 = 26$$
$$v'(123) = 3v(123) + d_1 + d_2 + d_3 = 3 * 10 + 1 + 1 + 1 = 33$$

Per a la proposició anterior:
$\phi(v') = \alpha\phi(v) + d = 3(\frac{11}{6}, \frac{20}{6}, \frac{29}{6}) + (1, 1, 1) = (\frac{39}{6}, \frac{66}{6}, \frac{93}{6})$

És important analitzar els axiomes o les propietats que verifiquen les solucions. Així donem un fonament a la solució i, alhora, la comprensió d'aquests axiomes pot facilitar-ne l'acceptació i aplicació.

El valor de Shapley es caracteritza pels axiomes d'eficiència, el tractament igualitari, el jugador fals i l'additivitat.

1. **EFICIÈNCIA:** La solució ha d'assignar el total dels guanys o dels costos entre els jugadors.

   És a dir: Si el vector $(x_1, ..., x_n)$ és el repartiment final, aleshores exigirem que:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = v(N)$$

2. **TRACTAMENT IGUALITARI:** Si dos jugadors realitzen aportacions equivalents al joc, és a dir, si són jugadors substituts, han de rebre igual pagament.

Dos jugadors i, j són **substituts**: $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ per a tota coalició S que no conté ni el jugador i ni el j.

En particular si $S = \emptyset$ s'hauria de verificar que $v(i) = v(j)$.

Com a conseqüència d'això, podem veure que totes les contribucions marginals de dos jugadors substituts són idèntiques.

$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(S \cup \{j\}) - v(S)$, $\forall S$ tal que $i \notin S, j \notin S$

Exemple:

$$\begin{array}{lll} v(1) = 3 & v(12) = 9 & \\ v(2) = 7 & v(13) = 9 & v(123) = 12 \\ v(3) = 7 & v(23) = 10 & \end{array}$$

i, j són substituts $\iff v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{i\})$, $\forall S$ tals que $i, j \notin S$

Per exemple, mirem si 1 i 2 són substituts: $S \subseteq N \setminus \{1, 2\}$

$$\text{Per } S = \emptyset \quad \text{tenim} \quad v(\emptyset \cup \{1\}) \stackrel{?}{=} v(\emptyset \cup \{2\})$$
$$\underbrace{v(1)}_{3} \neq \underbrace{v(2)}_{7}$$

Per tant, 1 i 2 no són substituts. Per la mateixa raó 1 i 3 tampoc ho seran.

Mirem si ho són 2 i 3: $S \subseteq N \setminus \{2,3\}$

$$S = \{\emptyset\} \quad \longrightarrow \quad v(\emptyset \cup \{2\}) \stackrel{?}{=} v(\emptyset \cup \{3\})$$

$$v(2) = v(3) = 7 \qquad \text{Sí!}$$

$$S = \{1\} \quad \longrightarrow \quad v(\{1\} \cup \{2\}) = v(\{1\} \cup \{3\})$$

$$v(12) = v(13) = 9 \qquad \text{Sí!}$$

$\Longrightarrow$ 2 i 3 són substitutius.

3. **TRACTAMENT DE JUGADOR FALS:** *dummy*
Si un jugador no aporta cap benefici addicional a la resta de jugadors no ha de rebre cap pagament addicional.

Un jugador és **fals** o *dummy* si la seva contribució marginal a qualsevol coalició és el seu valor individual.

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(i), \forall S \subseteq N \setminus \{i\}$$

Si es dóna aquest cas, el jugador ha de rebre $v(i)$.

Exemple:

$$\begin{array}{ccc} v(1)=3 & v(12)=10 & \\ v(2)=10 & v(13)=9 & v(N)=17 \\ v(3)=7 & v(23)=14 & \end{array}$$

Hi ha algun jugador fals o *dummy*?

$$i \; dummy \Longleftrightarrow v(S\cup\{i\})-v(S)=v(i),\ \forall S\subseteq N\setminus\{i\}$$

$\underline{i{=}1}$ és *dummy*?

$$\begin{array}{ccc} S=\emptyset & \rightarrow & v(1)-v(\emptyset)=v(1) \\ S=\{2\} & \rightarrow & v(12)-v(2)=v(1) \\ & & \text{10-7} \;=\; 3 \\ S=\{3\} & \rightarrow & v(13)-v(3)=v(1) \\ & & \text{10-7} \;=\; 3 \\ S=\{23\} & \rightarrow & v(123)-v(23)=v(1) \\ & & \text{17-14} \;=\; 3 \end{array}$$

El jugador 1 és *dummy*.

El jugador i=2 és *dummy*?

$$
\begin{array}{ccc}
S=\emptyset & \rightarrow & v(2)-v(\emptyset)=v(2) \\
S=\{1\} & \rightarrow & v(12)-v(1)=v(2) \\
 & & \text{10-3} = 7 \\
S=\{3\} & \rightarrow & v(23)-v(3)=v(2) \\
 & & \text{14-7} = 7 \\
S=\{13\} & \rightarrow & v(123)-v(13)=v(2) \\
 & & \text{17-10} = 7
\end{array}
$$

El jugador 2 és *dummy*.

El jugador i=3 és *dummy*?

$$S=\emptyset \quad \rightarrow \quad v(3)-v(\emptyset)=v(3) \quad \text{Sí}$$
$$S=\{1\} \quad \rightarrow \quad v(132)-v(1)=v(3)$$
$$10\text{-}3=7 \quad \text{Sí}$$
$$S=\{2\} \quad \rightarrow \quad v(23)-v(3)=v(3)$$
$$14\text{-}7=7 \quad \text{Sí}$$
$$S=\{12\} \quad \rightarrow \quad v(123)-v(12)=v(3)$$
$$17\text{-}10=7 \quad \text{Sí}$$

El jugador 3 també és *dummy*.

És un joc additiu, tots tres són *dummies* $\Rightarrow$ Quin serà el valor de Shapley?

$$\phi(v)=(3,7,7)$$

Exemple:

$$\begin{array}{lll} v(1)=3 & v(12)=9 & \\ v(2)=7 & v(13)=9 & v(123)=12 \\ v(3)=7 & v(23)=10 & \end{array}$$

<u>$i=1$</u> és *dummy*?

$$\begin{array}{lcccc} S=\emptyset & \rightarrow & v(1)-v(\emptyset)=v(1) & \rightarrow & \text{Sí} \\ S=\{2\} & \rightarrow & \underbrace{v(12)}_{9}-\underbrace{v(2)}_{7}\neq\underbrace{v(1)}_{3} & & \end{array}$$

<u>$i=2$</u> és *dummy*?

$$S=\{3\} \quad \rightarrow \quad \underbrace{v(23)}_{10}-\underbrace{v(3)}_{7}\neq\underbrace{v(2)}_{7}$$

El jugador i=3 és *dummy*?

$$S = \{1\} \quad \rightarrow \quad \underbrace{v(13)}_{9} - \underbrace{v(1)}_{3} \neq \underbrace{v(3)}_{7}$$

No hi ha cap jugador que sigui *dummy*.

Quin serà el valor de Shapley per a aquest joc?

$$\phi(v) = \left(\tfrac{14}{6}, \tfrac{29}{6}, \tfrac{29}{6}\right) \neq (\underbrace{v(1)}_{3}, \underbrace{v(2)}_{7}, \underbrace{v(3)}_{7})$$

4. **ADDITIVITAT:** Si acceptem un criteri de repartiment, diguem-li α, i els beneficis que es poden obtenir d'un projecte provenen de l'addició dels beneficis de dos subprojectes o centres de beneficis diferents, aleshores cada jugador hauria de rebre la suma d'aplicar el criteri a cadascun dels subprojectes.

   És a dir: Si $v = v_1 + v_2 \iff v(S) = v_1(S) + v_2(S), \forall S \subseteq N$

   Llavors, $\alpha(v) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$.

Exemple:

$$\begin{array}{lll} v_1(1) = 3 & v_1(12) = 10 & \\ v_1(2) = 7 & v_1(13) = 10 & v_1(N) = 17 \\ v_1(3) = 7 & v_1(23) = 14 & \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\phi(v_1) = (3, 7, 7)$$

$$\begin{array}{lll} v_2(1) = 3 & v_2(12) = 9 & \\ v_2(2) = 7 & v_2(13) = 9 & v_2(N) = 12 \\ v_2(3) = 7 & v_2(23) = 10 & \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\phi(v_2) = (\tfrac{14}{6}, \tfrac{29}{6}, \tfrac{29}{6})$$

Per tant, el nou joc és:

$$\begin{array}{lll} v(1)=6 & v(12)=19 & \\ v(2)=14 & v(13)=19 & v(N)=29 \\ v(3)=14 & v(23)=24 & \end{array}$$

$$\downarrow$$

Quin és el valor de Shapley de v?

$$\begin{array}{lcl} \sigma_1=(123) & \longrightarrow & m^{\sigma_1}(v)=(6,13,10) \\ \sigma_2=(132) & \longrightarrow & m^{\sigma_2}(v)=(6,10,13) \\ \sigma_3=(213) & \longrightarrow & m^{\sigma_3}(v)=(5,14,10) \\ \sigma_4=(231) & \longrightarrow & m^{\sigma_4}(v)=(5,14,10) \\ \sigma_5=(312) & \longrightarrow & m^{\sigma_5}(v)=(5,10,14) \\ \sigma_6=(321) & \longrightarrow & m^{\sigma_6}(v)=(5,10,14) \end{array}$$

$$\boxed{\phi(v)=(\tfrac{32}{6},\tfrac{71}{6},\tfrac{71}{6})}$$

Observem que: $\phi(v_1)+\phi(v_2)=(3,7,7)=(\frac{14}{6},\frac{29}{6},\frac{29}{6})$

Per tant, es verifica l'additivitat.

Teorema:

El valor de Shapley és l'única solució que verifica els axiomes d'eficiència, el tractament igualitari, l'additivitat i el tractament de jugador fals.

Per tant:

AXIOMES

1-Eficiència
2-Tractament igualitari
3-Tractament de jugador fals

} Molts criteris de repartiment les verifiquen, són simples i coherents.

4-Additivitat $\rightarrow$ És l'axioma que realment diferencia el valor de Shapley d'altres solucions.

Per comprovar que es compleix només cal comprovar que els marginals compleixen:

$$\forall i, \forall S \subseteq N \setminus \{i\} \Rightarrow v(S \cup \{i\}) - v(S) = v_1(S \cup \{i\}) - v_1(S) + v_2(S \cup \{i\}) - v_2(S)$$

Cert, ja que $v = v_1 + v_2$.

La teoria de jocs cooperatius també s'ha utilitzat per descriure i estudiar sistemes de votació, i també el poder relatiu dels diferents agents. Una junta d'accionistes, el parlament d'un país, una comunitat de propietaris, etc., són casos en què els sistemes de votació són un instrument de decisió col·lectiva.

En molts casos, els agents arriben al poder mitjançant la cooperació. Aliances entre partits polítics, compra d'accions per obtenir una majoria qualificada o el poder de veto d'alguns països a la ONU, en són alguns exemples reals.

La teoria de jocs cooperatius analitza aquestes situacions i a partir d'una regla de votació analitza el poder relatiu de cada un dels agents.

Els jocs de votació també s'anomenen jocs simples, ja que dividim les coalicions en dos tipus:
coalicions guanyadores $v(S) = 1$ i coalicions perdedores. $v(S) = 0$

Propietats dels jocs de votació

1. $v(S) = 1$
   (Si tots estan d'acord en una decisió, aquesta es pren.)

2. Si $v(S) = 1 \Rightarrow \forall T \supseteq S$, $v(T) = 1$
   (Monotonia: Si una coalició és guanyadora, qualsevol altra coalició que la inclogui també ho serà.)

Definim:

Un joc $v \in G^n$, és un joc **simple** si satisfà:

$$v(S) \in \{0, 1\} \text{ per a tota } S \subseteq N \text{ en què } v(N) = 1$$

Si, a més, satisfà la propietat de monotonia, $\forall S, T \subseteq N$; si $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$, direm que el joc és **simple monòton**.

Exemple, jocs de majoria simple

Descrivim mitjançant la funció característica d'un joc, el sistema de votació de majoria simple d'un col·lectiu de n agents on cada agent té un vot:

majoria simple $\Longrightarrow$ més de la meitat dels vots per guanyar

Si n és senar, el poder el tindran les coalicions amb un nombre d'agents superior a $\frac{n-1}{2}$.

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |S| \geq \frac{n}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |S| < \frac{n}{2} \end{cases}$$

Exemple: $N = \{1,2,3\}$ $n = 3$ és senar $\rightarrow \frac{n-1}{2} = 1$

$$\begin{array}{lll} v(1) = 0 & v(12) = 1 & \\ v(2) = 0 & v(13) = 1 & v(N) = 1 \\ v(3) = 0 & v(23) = 1 & \end{array}$$

$\uparrow$

Amb 2 jugadors ja hi ha majoria simple.

Si n és parell,

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |S| \geq \frac{n}{2} + 1 \\ 0 & \text{si} \quad \text{en un altre cas} \end{cases}$$

Exemple: $N = \{1,2,3,4\}$, $n = 4$ és parell $\rightarrow \frac{n}{2} + 1 = 3$ majoria simple.

$$\begin{array}{llll} v(1) = 0 & v(12) = 0 & v(123) = 1 & \\ v(2) = 0 & v(13) = 0 & v(124) = 1 & \\ v(3) = 0 & v(14) = 0 & v(134) = 1 & v(N) = 1 \\ v(4) = 0 & v(23) = 0 & v(234) = 1 & \\ & v(24) = 0 & & \end{array}$$

És fàcil veure que un joc de majoria simple sempre és (1) **monòton** i (2) **superadditiu.**

Vegem-ho:

(1) $\forall S, T \subseteq N,\ S \subseteq T,\ v(S) \leq v(T)$

- Si $v(S) = 0 \Longrightarrow v(T) = 0$ o $1 \Longrightarrow v(S) \leq v(T)$
- Si $v(S) = 1 \Longrightarrow v(T) = 1 \Longrightarrow v(S) \leq v(T)$

(2) $\forall S, T \subseteq N,\ S \cap T = \emptyset,\ v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$

No pot haver-hi dues coalicions guanyadores disjuntes, per tant:

Si $S \cap T = \emptyset \Longrightarrow$ tenim tres possibilitats:

1- $v(S) = v(T) = 0 \Longrightarrow \underbrace{v(S)}_{0} + \underbrace{v(T)}_{0} \leq v(S \cup T) = 0$ o 1.

2- $v(S) = 0,\ v(T) = 1 \Rightarrow$ com que $T \subseteq S \cup T \Rightarrow v(S \cup T) = 1$;

per tant, $\underbrace{v(S)}_{0} + \underbrace{v(T)}_{1} \leq v(S \cup T) = 1$.

3- $v(S) = 1,\ v(T) = 0$, ídem que el cas anterior.

Exemple: jocs de majoria ponderada.

En aquest tipus de jocs cada jugador té un nombre de vots $w_i > 0$ per a $i = 1, ..., n$. Per a què s'adopti una decisió cal que la suma dels vots dels jugadors que hi estan a favor superi una certa quantitat q en què $0 \leq q < \sum_{i=1}^{n} w_i$. Aquests sistemes de votació es representen com $[q; w_1, ..., w_n]$.

Direm $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$, és la suma dels vots d'una coalició.

$$v(S) \begin{cases} 1 & \text{si} \quad w(S) \geq q \\ 0 & \text{si} \quad w(S) < q \end{cases}$$

- És un joc simple i monòton. Tindrà altres propietats depenent dels paràmetres.
- En general no és superadditiu.

Exemple: [4; 1,5, 1,5] $\{1,2\}\{3,4\}$ són coalicions guanyadores disjuntes $\Rightarrow \underbrace{v(12)}_{1} + \underbrace{v(34)}_{1} \nleq \underbrace{v(1234)}_{1}$

En aquest cas el joc no és superadditiu.

$$\begin{array}{llll} v(1)=0 & v(12)=1 & v(123)=1 & \\ v(2)=1 & v(13)=0 & v(124)=1 & \\ v(3)=0 & v(14)=1 & v(134)=1 & v(N)=1 \\ v(4)=1 & v(23)=1 & v(234)=1 & \\ & v(34)=1 & & \end{array}$$

Exercici:

Si tenim el joc simple monòton en què les coalicions guanyadores minimals són $\{3\}$, $\{1,2\}$ sobre $N = \{1,2,3\}$, demostreu que [0,5; 0,2, 0,3, 0,5] i [2; 1, 1, 3] són dues representacions del mateix joc en termes de majories ponderades.

Estudieu la superadditivitat del joc.

$v_1 : [0,5; 0,2, 0,3, 0,5]$

$$\begin{array}{lll} v_1(1) = 0 & v_1(12) = 1 & \\ v_1(2) = 0 & v_1(13) = 1 & v_1(123) = 1 \\ v_1(3) = 1 & v_1(23) = 1 & \end{array}$$

$v_2 : [2; 1, 1, 3]$

$$\begin{array}{lll} v_2(1) = 0 & v_2(12) = 1 & \\ v_2(2) = 0 & v_1(13) = 1 & v_2(N) = 1 \\ v_2(3) = 1 & v_2(23) = 1 & \end{array}$$

Observem que $v_1(S) = v_2(S)$, $\forall S \subseteq N$.

Estudiem la superadditivitat del joc:

$$\begin{array}{lll} v(1)=0 & v(12)=1 & \\ v(2)=0 & v(13)=1 & v(123)=1 \\ v(3)=0 & v(23)=1 & \end{array}$$

$S=\{12\}$, $S=\{3\}$, $S\cap T=\emptyset$

$$v(S)+v(T)\overset{?}{\leq} v(S\cup T)$$

$$\underbrace{v(12)+v(3)\leq v(123)}_{1+1\not\leq 1}$$

No és superadditiu.

Exercici

Demostreu que el màxim i el mínim de dos jocs simples monòtons són jocs simples monòtons.

(N_1, v_1) i (N_1, v_2) són dos jocs simples monòtons.

- Vegem que $max\{v_1, v_2\}$ és també un joc simple:

v_1 simple $\Leftrightarrow v_1(S) \in \{0, 1\}, \forall S \subseteq N$ i $v_1(N) = 1$

v_2 simple $\Leftrightarrow v_2(S) \in \{0, 1\}, \forall S \subseteq N$ i $v_2(N) = 1$

$\Rightarrow max\{v_1, v_2\} \in \{0, 1\}$ i $max\{v_1(N), v_2(N)\} = \{1, 1\} = 1$

$\Rightarrow$ Per tant, $max\{v_1, v_2\}$ és un joc simple.

Es faria igual per al mínim.

- Vegem que $max\{v_1, v_2\}$ és monòton:

v_1 monòton $\Leftrightarrow \forall S \subseteq T$ i $v_1(S) = v_1(T)$

v_2 monòton $\Leftrightarrow \forall S \subseteq T$ i $v_2(S) = v_2(T)$

$\Rightarrow max\{v_1(S), v_2(S)\} \leq max\{v_1(T), v_2(T)\}$

$\Rightarrow$ Per tant, el *max* també és monòton.

De la mateixa manera es demostra per al mínim.

Exercici

Considerem el joc de votació ponderada següent [4; 2, 1, 6]. Demostreu que es tracta d'un joc superadditiu.

$$
\begin{array}{lll}
v(1) = 0 & v(12) = 0 & \\
v(2) = 0 & v(13) = 1 & v(123) = 1 \\
v(3) = 1 & v(23) = 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
S \cap T = \emptyset & \\
\{1\}\{23\} \to v(1) + v(23) = & 0 + 1 \leq v(N) = 1 \\
\{2\}\{13\} \to 0 + 1 \leq 1 & \\
\{3\}\{12\} \to 1 + 0 \leq 1 & \\
\{1\}\{2\} \to 0 + 0 \leq 0 \longrightarrow & \forall S \cap T = \emptyset \\
\{1\}\{23\} \to 0 + 1 \leq 1 & v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) \\
\{2\}\{3\} \to 0 + 1 \leq 1 & \text{És superadditiu.}
\end{array}
$$

Propietat:
Si tenim un joc de majoria ponderada $[q; w_1, ..., w_n]$, si $q > \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{2} \Longrightarrow$ el joc és superadditiu.

És una condició suficient, però no necessària($\not\Leftarrow$).

Per exemple: El problema anterior [4; 2, 1, 6]

$$q = 4 \quad < \quad \frac{2+1+6}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$
$$4 = q \quad \not> \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{2} = 4,5$$

Aquest joc no compleix aquesta condició i, en canvi, hem vist que era supperadditiu.

El *core* d'un joc de votació

Joc simple: $v(S) \in \{0,1\}$, $\forall S \subseteq N$ i $v(N) = 1$

i monòton: $v(S) \leq v(T)$ si $S \subseteq T$

Un jugador $i \in N$ és un jugador amb poder de veto en el joc v si qualsevol coalició que no el contingui té valor zero. És a dir, $v(S) = 0$, $\forall S \subseteq N$ tal que $i \notin S$.

Exemple:

- $N = \{1, 2, 3\}$, si 1 té poder de veto $\Rightarrow$
  $v(2) = v(3) = v(23) = 0$
- $N = \{1, 2, 3, 4\}$, si 1 té poder de veto $\Rightarrow$
  $v(2) = v(3) = v(4) = v(23) = v(24) = v(34) = v(234) = 0$

També pot haver-hi més d'un jugador amb poder de veto, per exemple:

$$
\begin{array}{llll}
v(1) = 0 & v(12) = 0 & v(123) = 0 & \\
v(2) = 0 & v(13) = 0 & v(124) = 1 & \\
v(3) = 0 & v(14) = 0 & v(134) = 1 & v(N) = 1 \\
v(4) = 0 & v(23) = 0 & v(234) = 0 & \\
 & v(24) = 0 & &
\end{array}
$$

Reunirem en una coalició tots els jugadors amb poder de veto i ho denotarem per:

$$Veto(v) = \{i \in N | i \text{ és veto en } v\}$$

$Veto(v) \subseteq N$ i pot ser buida.

Si el joc és simple: $\boxed{Veto(v) = \bigcap_{\substack{S \subseteq N \\ v(S)=1}} S}$

És a dir, els jugadors amb poder de veto són aquells que pertanyen a totes les coalicions guanyadores.

Tot i que $Veto(v)$ pot ser no guanyadora com passa a l'exemple anterior:

$$Veto(v) = \{1, 4\} \text{ i } v(14) = 0$$

La coalició $Veto(v)$ en els jocs simples (no cal que siguin monòtons) té tota la informació per determinar el *core*.

Proposició:

Per a tot joc simple (N, v) tenim:

$$Core(v) = \{ \quad x \in R^n_+ | \sum_{i \in Veto(v)} x_i = 1 \quad \text{i } x_i = 0 \text{ per a tot } i \notin Veto(v)\}$$

$$R^n_+ = \quad \{x \in R^n | \ x_i \geq 0 \qquad \forall i \in N\}$$

Demostració:

$\supseteq$ Tenim que $x \in R^n_+$, $\sum_{i \in Veto(v)} x_i = 1$ i $x_i = 0$ per a tot $i \notin Veto(v)$.

Hem de veure que $x \in C(v) \Leftrightarrow x(S) \geq v(S)$, $\forall S \subseteq N$.

- Si $v(S) = 0 \rightarrow x(S) \geq v(S) = 0$
- Si $v(S) = 1 \rightarrow Veto(S) \subseteq S \Rightarrow x(S) \geq x(Veto(v)) = v(S)$

$\subseteq$ Tenim que x arbitrari, $x \in C(v)$.
$x \in C(v) \Rightarrow x(N) = 1$ i $x_i \geq 0$, $\forall i \in N \Rightarrow$ almenys hi ha un jugador $i_* \in N$ tal que $x_{i_*} > 0$

Si $S \subseteq N$ és arbitrària tal que $i_* \notin S$.

Llavors:

$$v(S) \underset{\substack{\uparrow \\ x \in C(v) \\ x(S) \geq v(S) \forall S}}{\leq} \overbrace{\sum_{i \in S} x_i}^{x(S)} \leq \overbrace{\sum_{j \in N \setminus \{i_*\}} x_j}^{x(N \setminus \{i_*\})} = 1 - x_{i_*} < 1 \Rightarrow v(S) < 1$$

Com que el joc és simple $\Rightarrow v(S) = 0$.

Per tant, hem vist que si $x_{i_*} > 0$ el jugador i_* ha de ser un jugador amb poder de veto. Així que x serà $\sum_{i \in Veto(v)} x_i = 1$ i $x_i = 0$ per a tot $i \notin Veto(v)$.

D'aquí podem deduir que si a cada jugador amb poder de veto, $i \in Veto(v)$, li associem el vector de la base canònica de R^n; és a dir, $e_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$; aleshores:

$$\boxed{Core(v) = convex\{e_i | \ \ i \in Veto(v)\}}$$

Exemple:

$$\begin{array}{llll}
v(1)=0 & v(12)=1 & v(123)=0 & \\
v(2)=0 & v(13)=0 & v(124)=1 & \\
v(3)=0 & v(14)=0 & v(134)=0 & v(N)=1 \\
v(4)=0 & v(23)=0 & v(234)=0 & \\
 & v(24)=0 & &
\end{array}$$

- És un joc simple, però no monòton.

$$Veto(v) = \{1,2\}$$
$$\Downarrow$$
$$C(v) = \{(x_1, x_2, 0, 0) | \underset{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}{x_1 + x_2 = 1}\} = convex\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$$

- Notem que en aquesta classe de jocs si $x \in core(v)$, els jugadors sense poder de veto reben zero i tot el poder està en mans dels jugadors amb poder de veto!!
- També observem que el *core* serà $\neq \emptyset \Leftrightarrow$ hi ha jugadors amb poder de veto $\Rightarrow$ el *core* serà buit en molts casos.

Sembla més apropiat escollir solucions del conjunt de Weber ja que d'entrada sabem que serà no buit.

Mirem quin és el conjunt de Weber per als jocs simples i monòtons.

El conjunt de Weber

Direm que una **coalició** $S \subseteq N$ és **guanyadora minimal** de v si:

a. $v(S) = 1$

b. No conté cap subcoalició pròpia guanyadora, és a dir, per a qualsevol $S' \subseteq S$ amb $S' \neq S$, $v(S') = 0$.

Els **vectors de contribució marginals** d'un joc simple monòton són:

$$m^{\sigma}(v) = (0, \ldots, 0, \overset{i,}{1}, 0, \ldots, 0)$$

$\forall i \in \bigcup_{k=1}^{r} S_k$ on S_k són totes les coalicions guanyadores minimals.

Si (N, v) és un joc simple monòton:

$$W(v) = convex\{e_i | i \in \bigcup_{k=1}^{r} S_k\}$$

en què $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i,}{1}, 0, \ldots, 0)$ i S_k són totes les coalicions minimals guanyadores del joc $k = 1, ..., r$.

Aquest conjunt assigna valor zero als jugadors falsos (*dummies*). Sembla una restricció molt raonable ja que els jugadors no pertanyen a cap coalició guanyadora minimal.

Si hem de triar una distribució eficient que mostri el poder real dels votants, sembla raonable escollir-la del conjunt de Weber.

En particular el valor de Shapley, que aplicat als jocs de votació rep el nom d'**índex de poder de Shapley-Shubik**, sempre pertany al conjunt de Weber.

Un índex de poder és una solució d'un joc de votació. Quin significat té?

1. Probabilista. Indica la probabilitat de cada jugador de guanyar una votació. És a dir, dóna una idea *a priori* de quantes votacions guanyaria el jugador sobre una mostra extensa d'aquestes votacions.
2. Mesura *a priori* del poder dels jugadors abans de la votació. Amb aquesta informació els jugadors poden decidir quines aliances formar.

L'elecció de les interpretacions depèn del joc. Pot haver-n'hi altres.

Exemple:

Comunitat Econòmica Europea.

Tractat de Roma (1958). Naixement de la CEE:

$\underset{(1958)}{CEE} = \{$Alemanya, França, Itàlia, Bèlgica, Països Baixos, Luxemburg$\}$

$\left.\begin{array}{l}\text{A} = \text{Alemanya}\\ \text{I} = \text{Itàlia}\\ \text{F} = \text{França}\end{array}\right\}$ 4 vots

$\left.\begin{array}{l}\text{B} = \text{Bèlgica}\\ \text{P} = \text{Països Baixos}\end{array}\right\}$ 2 vots

$\left.\text{L} = \text{Luxemburg}\right\}$ 1 vot

Total 17 vots

Per aprovar una decisió eren necessaris, com a mínim, 12 vots (el 70,6% aprox.)

$$\Downarrow$$

Joc de majoria ponderada

$$[12; 4, 4, 4, 2, 2, 1]$$

A,I,F $\longrightarrow$ simètrics $\Longrightarrow$ L'índex de poder de Shapley-Shubik els assignaria el mateix poder als tres.

B,P $\longrightarrow$ simètrics

$[12; 4, 4, 4, 2, 2, 1]$

Calculem el poder de Bèlgica:

$$\{\underset{\substack{\downarrow\\4}}{A}, \underset{\substack{\downarrow\\4}}{I}, \underset{\substack{\downarrow\\4}}{F}, \underset{\substack{\downarrow\\2}}{B}, \underset{\substack{\downarrow\\2}}{P}, \underset{\substack{\downarrow\\1}}{L}\} \text{ mínim } 12$$

Com que Bèlgica té 2 vots, farà que les coalicions formades pels seus predecessors passin de perdedores a vencedores quan sumin 10 o 11 vots.

Per tal que els predecessors sumin 10, els predecessors hauran de sumar $4 + 4 + \underset{\substack{\downarrow\\P}}{2}$ i darrere seu quedarà un dels de 4 vots i Luxemburg amb 1 vot.

Per tant, serà:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \\ 4 \\ 2\ (\text{P}) \end{array}\right\} \rightarrow B \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4 \\ 1\ (\text{L}) \end{array}\right.$$

Col·locats d'aquesta manera segons els pesos tindrem vàries possibilitats. Podem tenir:

$$\left.\begin{array}{c} \text{A} \\ \text{I} \\ \text{P} \end{array}\right\} \rightarrow B \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{F} \\ \text{L} \end{array}\right.$$

$\downarrow$ *Es poden ordenar de* 3!=6 *maneres*

$\downarrow$ *Es poden ordenar de* 2!=2 *maneres*

Total de possibles ordenacions: 6*2=12

També podem tenir:

$$\left.\begin{array}{c} \text{A} \\ \text{F} \\ \text{P} \end{array}\right\} \rightarrow B \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{L} \end{array}\right. \Rightarrow \text{12 possibles ordenacions}$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{F} \\ \text{I} \\ \text{P} \end{array}\right\} \rightarrow B \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{A} \\ \text{L} \end{array}\right. \Rightarrow \text{12 possibles ordenacions}$$

Mirem ara les possibilitats que hi ha que els predecessors de Bèlgica sumin 11.

Per tal que els predecessors de Bèlgica sumin 11 vots, necessàriament l'hauran de precedir països que sumin $4+4+\underset{P}{\underset{\downarrow}{2}}+\underset{L}{\underset{\downarrow}{1}}$.

Per tant, serà:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \\ 4 \\ 2\text{ (P)} \\ 1\text{ (L)} \end{array}\right\} \rightarrow B \rightarrow \{\ 4$$

Col·locats d'aquesta manera, segons els vots hi ha diverses possibles ordenacions:

$$\left.\begin{array}{l}\text{A}\\ \text{F}\\ \text{P}\\ \text{L}\end{array}\right\} \rightarrow B \rightarrow \text{I} \Rightarrow 4! = 24 \text{ possibles ordenacions}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{A}\\ \text{I}\\ \text{P}\\ \text{L}\end{array}\right\} \rightarrow B \rightarrow \text{F} \Rightarrow 4! = 24 \text{ possibles ordenacions}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{I}\\ \text{F}\\ \text{P}\\ \text{L}\end{array}\right\} \rightarrow B \rightarrow \text{A} \Rightarrow 4! = 24 \text{ possibles ordenacions}$$

Total: 24+24+24=72 ordenacions en què els predecessors de Bèlgica sumen 11 vots.

Per tant, si tenim en compte que el nombre total d'ordenacions, dels sis països és $6!=720$, l'índex de Shapley-Shubik de Bèlgica serà:

$$\frac{72+36}{720} = \frac{9}{60} \approx 15\%$$

Serà el mateix per als Països Baixos $\longrightarrow \frac{9}{60} \approx 15\%$

Calculem el poder de Luxemburg:

Ell només disposa d'1 vot; per tant, la seva participació únicament serà decisiva quan els seus predecessors sumin 11 vots, però els predecessors tots tenen un nombre de vots parell, i per tant, mai sumaran 11:

$\Rightarrow$ Luxemburg mai serà decisiu perquè una coalició passi de perdedora o guanyadora. És un jugador fals. L'índex de Shapley-Shubik de Luxemburg és $0 = 0\%$.

Calculem el poder d'Alemanya, França i Itàlia:

Els tres tindran el mateix poder $\rightarrow x$ i, per eficiència, podem trobar-lo, ja que:

$$3x + \frac{9}{60} + \frac{9}{60} + 0 = 1 = v(N)$$

$$x = \frac{1 - \frac{18}{60}}{3} = \frac{14}{6} \approx 23,33\%$$

Per tant, l'índex de Shapley-Shubik assigna el següent poder a cada un dels països:

$$\{ \underset{\substack{\downarrow \\ 23{,}33}}{A}, \underset{\substack{\downarrow \\ 23{,}33}}{F}, \underset{\substack{\downarrow \\ 23{,}33}}{I}, \underset{\substack{\downarrow \\ 15}}{B}, \underset{\substack{\downarrow \\ 15}}{P}, \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{L} \}$$

Exemple:

1973, primera expansió de la CEE. S'hi incorporen el Regne Unit, Dinamarca i Irlanda.
Nou repartiment dels vots:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Alemanya}\\ \text{Itàlia}\\ \text{França}\\ \text{Regne Unit}\end{array}\right\}\ \text{10 vots (4x2,5)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Bèlgica}\\ \text{Països Baixos}\end{array}\right\}\ \text{5 vots (2x2,5)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dinamarca}\\ \text{Irlanda}\end{array}\right\}\ \text{3 vots}$$

Luxemburg $\rightarrow$ 2 vots (1x2)

Total 58 vots

Per aprovar una decisió ara serà necessari tenir 41 vots (es manté el percentatge del $70,6\%$ aprox.)

Joc de majoria ponderada:

$$[41; 10, 10, 10, 10, 5, 5, 3, 3, 2]$$

Amb aquest nou sistema, el “poder” dels jugadors inicials s’ha mantingut excepte el cas de Luxemburg que, a diferència del que intuïtivament sembla, ha guanyat pes, ja que deixa de ser jugador fals i el seu índex de Shapley-Shubik ja no és zero.

Per exemple, la incorporació de Luxemburg a la coalició formada per Alemanya, França, el Regne Unit i Itàlia, la converteix en guanyadora.

$$\underbrace{10+10+10+10}_{40}+\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Luxemburg}}}{2}=42$$

El mínim és 41; per tant, és guanyadora.

De fet, encara que hagués mantingut 1 sol vot, seguiria millorant el seu índex de poder, que deixaria de ser zero.

Exemple: El Consell de Seguretat de les Nacions Unides

Els votants són 15 països membres. Cinc d'ells són permanents: Xina, els Estats Units, França, el Regne Unit i Rússia.

Cada país té 1 vot. Per adoptar una resolució almenys calen 9 dels 15 vots.

Els membres permanents tenen dret de veto; per tant, cal el seu vot per poder aprovar qualsevol resolució. (Per simplificar, ignorem la possibilitat d'abstencions.)

És un joc simple monòton, en què les coalicions guanyadores minimals són les formades pels 5 membres permanents més 4 dels restants per tal d'arribar a 9 vots.

Vegem que es tracta d'un joc de majoria ponderada:

Per veure-ho hem de trobar uns pesos (o nombre de vots) per a cada jugador i una quota q.

- Com que tots els membres no permanents tenen el mateix poder, assignarem 1 vot a cadascun d'ells.
- Els membres permanents també tenen el mateix poder $\Rightarrow$ els assignem x vots.

$$\text{Joc: } [q; x, x, x, x, x, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots, 1]$$

Cal calcular q i x:

Una coalició amb

$$\left.\begin{array}{l}\text{10 no permanents}\\ +\\ \text{4 permanents}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{perdedora} \Longrightarrow \quad q > 4x + 10$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{5 permanents}\\ +\\ \text{4 no permanets}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{guanyadora minimal} \Longrightarrow \quad q \leq 5x + 4$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} q > 4x + 10 \\ \\ q \leq 5x + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x + 10 < q \leq 5x + 4 \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 4x + 10 < 5x + 4 \\ 10 - 4 < 5x - 4x \\ 6 < x \end{array}$$

Si prenem $\underline{x = 7}$ tindrem $38 < q \leq 39 \Rightarrow \underline{\text{q=39}}$.

El joc de majoria ponderada seria:

$$[39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

(Podríem descriure el mateix joc amb uns altres q i x)

Índex de poder de Shapley-Shubik:

Membres permanents $\longrightarrow \frac{421}{2.145} = 0,1963$

Membres no permanents $\longrightarrow \frac{4}{2.145} = 0,00186$ (unes 100 vegades menys)

Com repartim quan no hi ha prou per tothom?

- Quan una empresa fa fallida, com es reparteix el que queda entre els seus creditors?

Més general:

- Quan diferents agents demanen una certa quantitat sobre un bé i la suma del que demanen els agents supera la quantitat del bé disponible, com s'ha de repartir aquest bé?

El nostre objectiu és identificar regles per associar a cada problema de demanda un repartiment entre els demandants de la quantitat disponible.

La regla més utilitzada en el context dels problemes de demanda o de bancarrota és la "proporcional": repartir proporcionalment a les demandes.

És una manera molt antiga de resoldre aquest tipus de conflictes. Nosaltres analitzarem altres possibilitats.

Per què hem de pensar que la regla proporcional és superior a les altres?

Al Talmud (antiga llei religiosa dels jueus) ja es donen diversos exemples de problemes de demanda i les seves recomanacions no coincideixen amb la proporcional.

Per tant, si existeixen altres recomanacions, pot haver-hi altres regles ben considerades.

El model que analitzarem es pot aplicar a molts exemples:

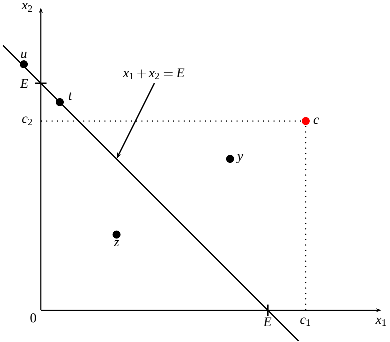
1. El Banc Mundial ha de repartir el seu pressupost per ajudar al desenvolupament d'alguns països. Cada país té unes necessitats i normalment el pressupost que hi ha no és suficient per cobrir les necessitats de tots els països. Com s'ha de fer?
2. L'organitzador d'un congrés científic té un pressupost que (quasi mai) és suficient per cobrir les despeses de tots els participants. Com s'ha de calcular què es retornarà a cada participant?
3. Els problemes de racionament en temps de guerra també es poden plantejar d'aquesta manera.

Problema de demanda (*claims problem*) (c, E) en què:

$c = (c_1, ..., c_n)$	$c_i \geq 0,\ i = 1 \dots n$	**demandes** d'un grup de n demandants (*claims*)
E	$E \geq 0$	**quantitat disponible** dels recursos

De manera que $\sum_{i=1}^{n} c_i \geq E$, ja que en cas contrari tindrien recursos suficients per satisfer a tothom i el problema desapareixeria.

Una **regla** assigna a cada problema de demanda (c, E) una $x = (x_1, ..., x_n)$ tal que $x_i \geq 0$ i $x_i \leq c_i$, $\forall i = 1, ..., n$ i $\sum x_i = E$.



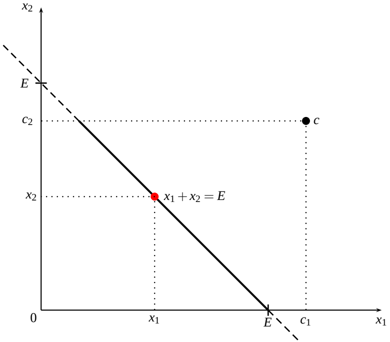
Els següents punts no són acceptables:

y→ Perquè $y_1 + y_2 > E$, es repartiria més del que hi ha disponible.

z→ Perquè $z_1 + z_2 < E$, es reparteix menys del que hi ha disponible.

t→ Perquè $t_2 > c_2$, l'agent 2 rep més del que reclama.

u→ Perquè $u_1 < 0$, assigna a l'agent 1 una quantitat negativa.



Els punts acceptables seran els que estan sobre la línia marcada en vermell.

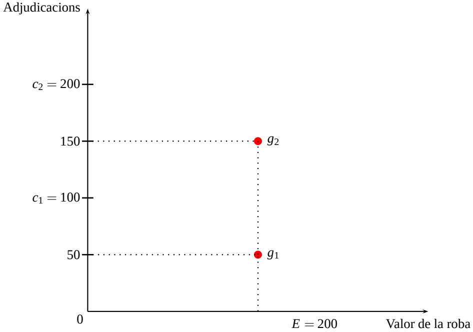
Han de ser punts:

- Restringits al pressupost, $x_1 + x_2 = E$.
- No negatius.
- Dominats pel vector de demandes, és a dir $x_1 \leq c_1$, $x_2 \leq c_2$.

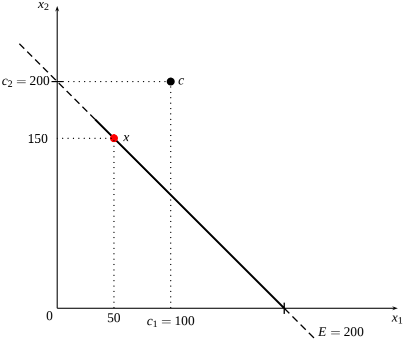
1- El problema de la lluita pel vestit

Dos homes discuteixen sobre qui és el propietari d'una peça de roba. Suposem que tots dos actuen de bona fe. Com es pot repartir la peça de roba entre ells? La peça està valorada en 200 unitats monetàries.

El primer demana la meitat $\rightarrow c_1 = 100$
El segon ho demana tot $\rightarrow c_2 = 200$
El Talmud recomana $y \equiv (50, 150)$



Si ho representem en el “camí de guanys” tindríem:



(Podem fer-ho perquè només tenim 2 demandants.)

2- El problema del repartiment de l'herència

Un home té 3 dones. El contracte de matrimoni especifica que, en cas que ell mori, elles han de rebre 100, 200 i 300, respectivament.

L'home mor i només deixa una herència de 100. Com s'ha de repartir?

El Talmud recomana:

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } E = 100 & \longrightarrow & \text{e}=(33,\ 33,\ 33) \\ \text{Si } E = 200 & \longrightarrow & \text{k}=(50,\ 75,\ 75) \\ \text{Si } E = 300 & \longrightarrow & \text{p}=(50,\ 100,\ 150) \end{array}$$

Volem trobar una fórmula o algoritme que interpreti els exemples anteriors.

Per això anirem analitzant algunes possibles regles de repartiment.

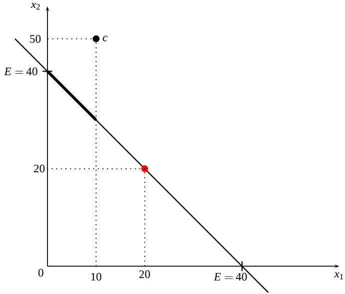
Constrained equal avards, CEA

Regla igualitària amb guanys restringida

Si dividim igual per a tots, podem tenir agents que rebin més del que han demanat. Per exemple:

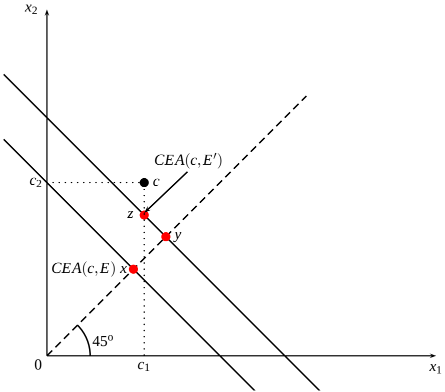
$$(c = (10, 50), E = 40)$$

Si la regla que agafem és *equal division*, és a dir, igual per a tots, el pagament que faríem seria $x_1 = x_2 = 20$. Per tant, $x_1 = 20 > c_1 = 10$, i això no és possible.



Constrained equal awards, *CEA*

La *CEA* repartirà igual, en un principi, però s'anirà ajustant per tal que cap agent pugui rebre un pagament superior al que reclama.



Si tenim el cas $(c, E) \Rightarrow CEA(c, E) = (x_1, x_2)$, en què

$$x_1 = x_2,\ x_1 < c_1 \text{ i } x_2 < c_2, \text{ paga igual als dos.}$$

Constrained Equal Awards, CEA

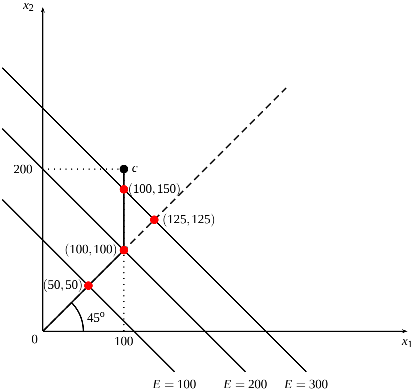
Si tenim el cas $(c, E') \Rightarrow CEA(c, E) = (z_1, z_2)$

$\begin{array}{l} z_1 = c_1 \\ z_2 < c_2 \end{array}$ Ja que si ens mantinguéssim a pagar igual als dos, es pagaria:

$y = (y_1, y_2)$ en què $y_1 = y_2$, però $y_1 > c_1$, i no pot ser.

Constrained equal awards, CEA

Exemple:



Si $E = 100$: $CEA(c, E = 100) = (50, 50)$

Si $E = 200$: $CEA(c, E = 200) = (100, 100)$

Si $E = 250$: $CEA(c, E = 250) = (100, 150)$

Constrained Equal Awards, *CEA*

$(c, E) \longrightarrow CEA(c, E) = x$ tal que per a cada i, $x_i \equiv min\{c_i, b\}$ en què b és tal que $\sum min\{c_i, b\} = E$.

Hi ha diverses maneres de calcular el *CEA* vector d'un problema:

1
- Fixem el vector c de demandes. Si E va de 0 a $\sum c_i$.
- Dividim igual fins que algú rep una quantitat igual a la seva demanda; serà el que fa la demanda més petita.
- Si la E és més gran que n vegades la demanda més petita, dividim el que queda entre els $n-1$ que demanen més fins que tots rebin una quantitat igual a la del segon més petit.
- Si E és superior al *claim* més petit $+(n-1)$ vegades el segon *claim* més petit, dividim el que quedi en parts iguals entre $(n-2)$ restants, etc.

Constrained equal awards, *CEA*

Exemple:

$$E = 500$$
$$c = (100, 200, 300)$$

$$(\underbrace{100}_{c_1 = min\{c_i\}}, 100, 100) \rightarrow E - 100 = 400$$

$$\rightarrow x = (\overbrace{\underbrace{100}_{c_1}}^{CEA(c,E)}, \underbrace{200}_{\substack{c_2 \\ min\{c_1, c_2\} = c_2 \\ segon\ \ més\ \ petit}}, 200)$$

Constrained equal awards, *CEA*

2 Divideix E en parts iguals. Si ningú obté més del que demana ja està. Si algú obté més del que demana, calcula per a cada agent la diferència entre el que obté i el que demana, i redistribueix de manera igualitària la suma d'aquestes diferències entre els que han rebut menys del que demanaven; això farà que algun estigui per sobre del que demana, llavors cal repetir el procés. Seguim fins que ningú rebi més del que demana.

Constrained equal awards, *CEA*

Exemple:

$$E = 75$$
$$c = (c_1, c_2, c_3) = (13, 30, 60)$$

Punt inicial: $(\underbrace{25}_{c_1}, 25, 25) \Rightarrow 25 - 13 = 12 \Rightarrow \frac{12}{2} = 6$

$\Rightarrow (13, 25 + 6, 25 + 6) = (13, \underbrace{31}_{c_2}, 31) \Rightarrow 31 - 30 = 1$

$\Rightarrow (13, 30, 31 + 1) = \boxed{(13, 30, 32) = CEA(c, E)}$

Constrained equal awards, *CEA*

Tornem a mirar l'exemple del Talmud per a $E = 100$:

$$c = (100, 200, 300) \quad E = 100$$

$x = (\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}) = (33,3, 33,3, 33,3) = CEA(c, E)$

Ningú està pagat per sobre del que demana. Ja està.

En aquest cas el que recomana el Talmud coincideix amb la regla *CEA*.

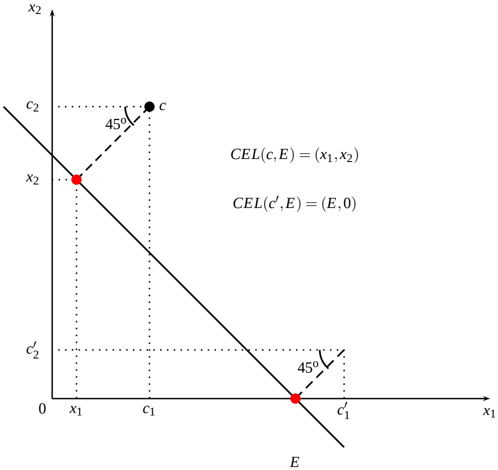
Constrained equal losses, *CEL*

Regla igualitària amb pèrdues restringida

Aquesta regla té en compte tant el que el demandant rep com el que no rep; és a dir, les pèrdues que té. Iguala el que deixem de rebre entre els demandants sense que ningú rebi una quantitat negativa.

El que demana més és el que serà pagat primer. Contràriament al que passava amb la regla *CEA* que primer pagava al que demanava menys.

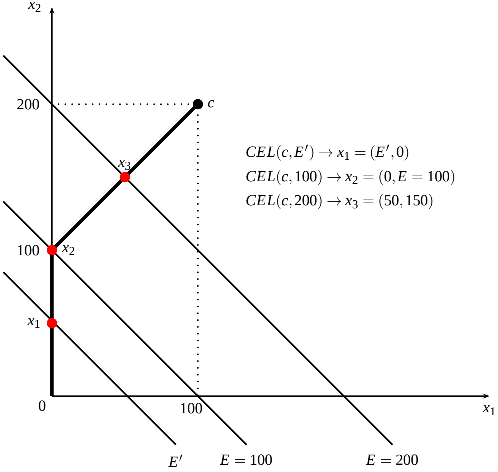
Constrained equal losses, CEL



$CEL(c,E) = (x_1, x_2)$

$CEL(c',E) = (E, 0)$

Constrained Equal Losses, *CEL*

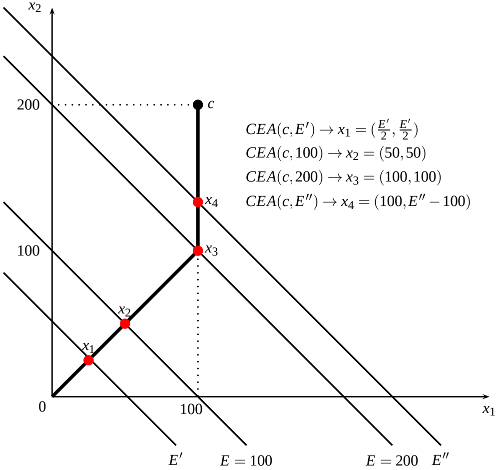


$CEL(c, E') \rightarrow x_1 = (E', 0)$
$CEL(c, 100) \rightarrow x_2 = (0, E = 100)$
$CEL(c, 200) \rightarrow x_3 = (50, 150)$

Clarament el jugador amb la demanda més gran està afavorit.

Constrained equal losses, *CEL*

Comparem-la amb la regla *CEA*:



Afavoreix al menor demanant.

Constrained equal losses, *CEL*

Per a cada (c, E), selecciona un vector x, tal que:

$$\boxed{x_i \equiv max\{0, c_i - b\}}$$

en què b s'escull per tal que $\sum max\{0, c_i - b\} = E$, $\forall i = 1, ..., n$.

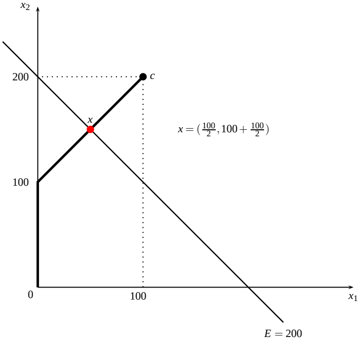
- Hi ha vàries maneres de calcular-la, nosaltres en veurem una: Suposem que E creix de 0 a $\sum c_i$.

Pas 1. Donem al que demana més fins que les seves pèrdues siguin iguals a la demanda del segon que demana més.

Pas 2. Si la quantitat disponible és encara més gran, dividim el que quedi entre els dos demandants més grans en parts iguals, fins que les seves pèrdues comunes siguin iguals a la demanda del tercer demandant més gran, etc.

Constrained equal losses, CEL

Exemple: $(c, E) = ((100, 200), 200)$



Pas 1: $x = (0, 100)$ pèrdues de segon=100=c

Pas 2: $E - 100 = 100 \rightarrow \frac{100}{2}$ per a cada un. $x = (\frac{100}{2}, 100 + \frac{100}{2})$.
Aquesta regla aplicada als problemes del Talmud nomes ens dóna la recomanació del primer problema, però en cap cas coincideix amb les recomanacions fetes pel cas de l'herència.

Constrained equal losses, CEL

- $(c, E) = ((100, 200, 300), 100)$

Pas 1: $\underbrace{x = (0, 0, 100)}_{CEL}$. Pèrdues del 3r $= 200 = c_2$, $E - 100 = 0$.

- $(c, E) = ((100, 200, 300), 200)$

Pas 1: $x = (0, 0, 100)$. Pèrdues del 3r $= 200 = c_2$, $E - 100 = 100$. Dividim en parts iguals entre el segon i el tercer.

Pas 2: $\rightarrow x = (0, 0 + 50, 100 + 50) = \boxed{CEL(c, E) = (0, 50, 150).}$

- $(c, E) = ((100, 200, 300), 300)$

Pas 1: $\rightarrow x = (0, 0, 100)$. Pèrdues del 3r $= 200 = c_2$, $E - 100 = 200$. Dividim en parts iguals entre el segon i el tercer.

Pas 2: $\rightarrow x = (0, 100, 100 + 100) = \boxed{CEL(c, E) = (0, 100, 200).}$

Proporcional, P

Regla que assigna uns pagaments proporcionals a les demandes de cada agent. Ja s'utilitzava en l'època d'Aristòtil. És la més utilitzada a la pràctica.

$$\text{Per a cada } (c, E) \rightarrow x_i = \frac{E}{\sum c_i} c_i, \; \forall i = 1, ..., n.$$

Només coincideix amb la recomanació del Talmud per al cas de l'herència quan $E = 300$.

Proporcional, P

Exemple: $(c, E) = ((100, 200, 300), 300)$

$$x_1 = \frac{300}{600}100 = \frac{1}{2}100 = 50$$

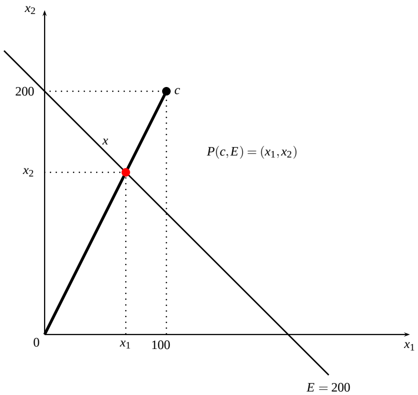
$$x_2 = \frac{300}{600}200 = \frac{1}{2}200 = 100$$

$$x_3 = \frac{300}{600}300 = \frac{1}{2}300 = 150$$

$$P(c, E) = \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Coincideix amb el Talmud.}}}{(50, 100, 150)}$$

Proporcional, P

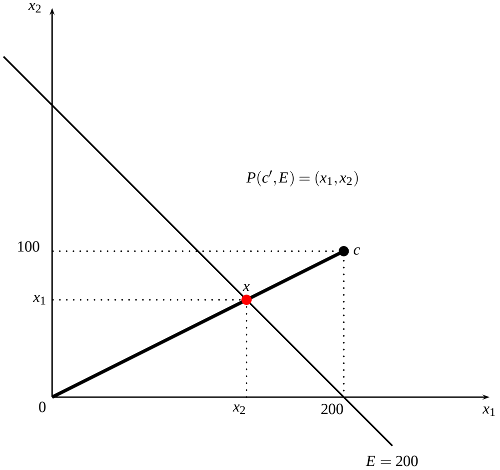
$$(c, E) = ((100, 200), 200)$$



$x_1 = \frac{200}{300}100 = \frac{2}{3}100 = 66,\bar{6}$ i $x_2 = \frac{200}{300}200 = \frac{2}{3}200 = 133,\bar{3}$. No coincideix amb el Talmud.

Proporcional, P

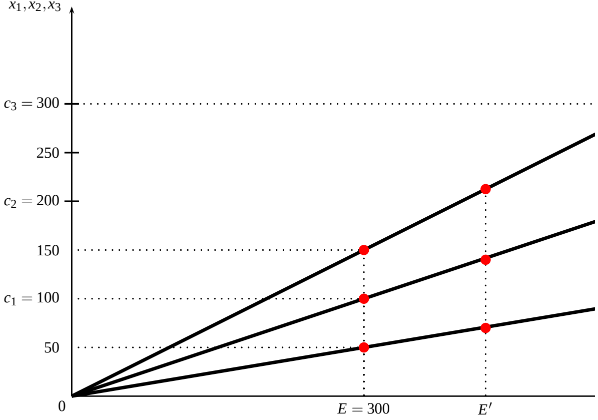
Si $(c', E) = ((200, 100), 200)$



Proporcional, P

Una altra manera de representar la proporcional que permet fer-ho per més de dos demandants:

Si $(c, E) = ((100, 200, 300), 200)$



Proporcional, P

Per a $E = 600$ a cada un li donarem el que demana, a partir d'aquí podem obtenir la proporcional per als altres valors de E inferiors. Per exemple, per a E=300, estan marcats a la gràfica, $x_1 = 50$, $x_2 = 100$, $x_3 = 150$.

Talmud, T

Cap de les regles que hem vist satisfà totes les recomanacions que proposa el Talmud per als dos exemples que hem donat. Però algunes de les regles que hem vist verifiquen algunes de les recomanacions:

$CEL \longrightarrow$ *Contested garment problem*

$CEA \longrightarrow$ *Estate division problem*

Sembla raonable pensar que el Talmud serà una combinació d'aquestes dues regles.

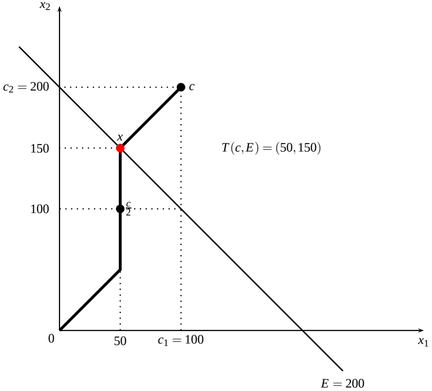
Talmud, T

La regla del Talmud, T, per a cada (c, E), $T(c, E) = x$ tal que per a cada i:

1. Si $E \leq \frac{1}{2} \sum c_i \Longrightarrow x_i = min\{\frac{c_i}{2}, b\}$ en què b és tal que $\sum min\{\frac{c_i}{2}, b\} = E$.
2. Si $E \geq \frac{1}{2} \sum c_i \Longrightarrow x_i = c_i - min\{\frac{c_i}{2}, b\}$ en què b és tal que $\sum [c_i - min\{\frac{c_i}{2}, b\}] = E$.

Talmud, T

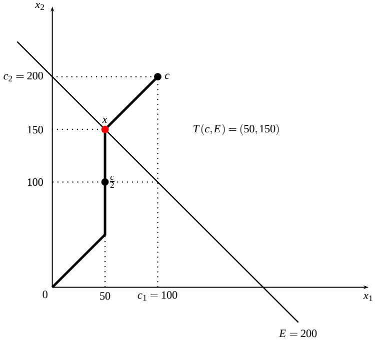
Exemple del Talmud:



1. Per a E=100, quines solucions ofereix el Talmud?
2. Per a E=150, quines solucions ofereix el Talmud?
3. Per a E=250, quines solucions ofereix el Talmud?

Talmud, T

$c = (100, 200)$



Resposta:

1. Per a E=100 $T(c, E) = (50, 50)$ coincideix amb la CEA

2. Per a E=150 $T(c, E) = y = (50, 100)$

3. Per a E=250 $T(c, E) = z = (75, 175)$ ja que $CEL = 50 \rightarrow (100 - \frac{50}{2}, 200 - \frac{50}{2})$

Talmud, T

Exemple: $c = (40, 60, 100)$, $\sum c_i = 200$

- Si $E = 197 \geq \frac{1}{2}\sum c_i = 100 \Rightarrow x_i = c_i - min\{\frac{c_i}{2}, b\}$
  - $x_1 = 40 - min\{20, b\}$
  - $x_2 = 60 - min\{30, b\}$
  - $x_3 = 100 - min\{50, b\}$

en què b és tal que:

$$40 - min\{20, b\} + 60 - min\{30, b\} + 100 - min\{50, b\} = 197$$

$$\underbrace{200 - 197}_{3} = min\{20, b\} + min\{30, b\} + min\{50, b\}$$

$$\Downarrow$$

b=1	x_1=40-1=39	
	x_2=60-1=59	Coincideix amb CEL.
	x_3=100-1=99	
	+ 197	

Talmud, T

- Si $E = 100 = \frac{1}{2}\sum c_i = 100 \Rightarrow$ a tots els donem la meitat del que demanen.

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{40}{2} = 20 \\ x_2 &= \tfrac{60}{2} = 30 \\ x_3 &= \tfrac{100}{2} = 50 \\ &\quad\; + 100 \end{aligned}$$

- Si $E = 70 \leq \frac{1}{2}\sum c_i = 100 \Rightarrow x_i = min\{\frac{c_i}{2}, b\}$

$$\text{b=25} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= min\{20, b\} = 20 \\ x_2 &= min\{30, b\} = 25 \\ x_3 &= min\{50, b\} = 25 \\ &\qquad\qquad\quad + 70 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &\Rightarrow x = (20, 25, 25) \\ &\text{Coincideix amb } CEA \end{aligned}$$

Propietats bàsiques

Si tenim (c, E) un problema de demanda; llavors una regla de repartiment $S(c, E)$ satisfà:

- EFICIÈNCIA: si $\sum S_i(c, E) = E$. És a dir, la regla ha de repartir exactament tot el que disposem.
- NO NEGATIVITAT: si $S_i(c, E) \geq 0 \ \forall i$
- ACOTADA PER LES DEMANDES: si $S_i(c, E) \leq c_i \ \forall i$

Propietats bàsiques

- RESPECTAR ELS DRETS MÍNIMS: Cada demandant ha de rebre, com a mínim, la diferència entre la quantitat disponible E i la suma del que demanen els altres, si aquesta diferència és positiva o, en cas contrari, zero:

$$S_i(c, E) \geq max\{E - \sum_{N \setminus \{i\}} c_j, 0\}$$

- SIMETRIA: Els agents que demanen el mateix han de rebre el mateix:

$$\text{si } c_i = c_j \Rightarrow S_i(c, E) = S_j(c, E)$$

(No sempre està justificada, de vegades, és millor introduir prioritats)

Propietats d'ordre

Exemple: $(c, E) = ((5, 7), 7)$

- Si $S(c, E) = (4, 3)$ sembla estrany que si el segon demana més, rebi menys no? Proposarem regles que respectin l'ordre de les demandes, sembla natural.
- Si $S(c, E) = (2, 5)$ sembla millor, ja que respecta l'ordre de les demandes. Però si mirem les pèrdues:

  El primer perd $5 - 2 = 3$.
  El segon perd $7 - 5 = 2$.
  El que demana més té més pèrdues.

  Suposem que són bancs que inverteixen en una empresa que acaba fent fallida. Si el que inverteix més pot guanyar més, si tot va bé; sembla natural que quan hi hagi pèrdues també li corresponguin més pèrdues. Per tant, demanarem que les pèrdues pel que reclama més siguin, almenys, iguals a les del que reclama menys.

Propietats d'ordre

- PRESERVAR L'ORDRE:

$$\text{Per qualsevol } i, j, \text{ si } c_i \geq c_j \Rightarrow S_i(c, E) \geq S_j(c, E)$$
$$\text{i } c_i - S_i(c, E) \geq c_j - S_j(c, E)$$

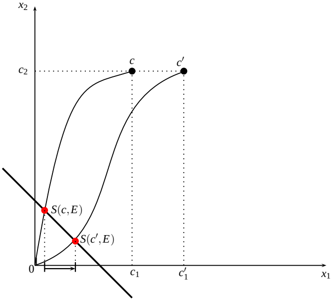
Totes les regles que hem donat satisfan aquesta propietat.

Exercici: comproveu-ho.

Propietats de monotonia

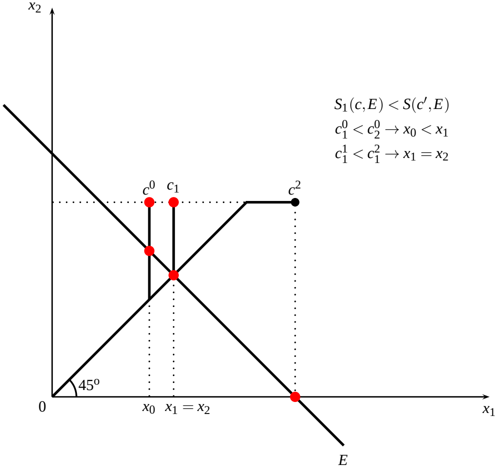
- MONOTONIA EN LES DEMANDES:

  Si un agent augmenta la seva demanda, ha de rebre almenys el que rebia abans: $\forall i,\ c_i' > c_i \Rightarrow S_i(c_i', c_{N\setminus i}, E) \geq S_i(c, E)$



$c_1' > c_1$ L'agent 2 té la demanda fixa. L'agent 1 augmenta la demanda.

Propietats de monotonia



CEA té aquesta propietat.

Propietats de monotonia

- MONOTONIA EN ELS RECURSOS:

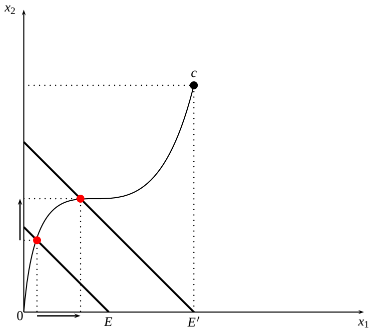
  Si augmenten els recursos disponibles, cada demandant ha de rebre almenys el que rebia inicialment.

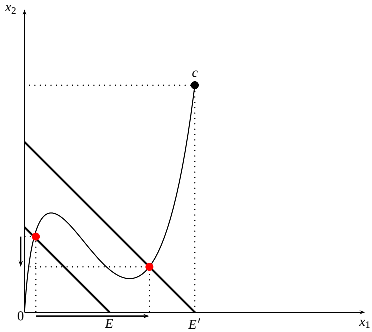
  Si $E' > E, \forall i \Rightarrow S_i(c, E') > S_i(c, E)$

Totes les regles que hem donat la satisfan. És una propietat poc restrictiva.

Propietats de monotonia

Exemples:





$$S_i(c,E) < S_i(c,E')\ \forall i$$

Sí que verifica la propietat.

$$S_1(c,E) < S_1(c,E')$$
$$S_2(c,E) \not< S_2(c,E')$$

El 2 perd!! $\Rightarrow$ No la verifica.

Edita:
Publicacions URV

1a edició: octubre de 2015
ISBN: 978-84-8424-393-9
Dipòsit legal: T 1388-2015

Publicacions de la Universitat Rovira i Virgili:
Av. Catalunya, 35 - 43002 Tarragona
Tel. 977 558 474
www.publicacions.urv.cat
publicacions@urv.cat

Aquesta editorial és membre de la Xarxa Vives i de l'UNE,
fet que garanteix la difusió i comercialització de les seves publicacions a escala estatal i internacional.

Aquesta publicació està dirigida als estudiants de segon curs del grau d'Economia en l'assignatura de Mètodes quantitatius per a l'anàlisi econòmica. L'objectiu principal és oferir uns apunts que puguin ajudar l'alumne a seguir millor l'assignatura, tenint en compte que es tracta d'una assignatura presencial i, per tant, s'han de complementar amb les explicacions del professor a classe i els exercicis de l'assignatura.