

Apunts de matemàtiques I

Cori Vilella Bach

Edita:
Publicacions de la Universitat Rovira i Virgili:
Av. Catalunya, 35 - 43002 Tarragona
Tel. 977 558 474 - Fax: 977 558 393
www.publicacionsurv.cat
publicacions@urv.cat

1a edició: setembre de 2011

DL: T-1146-2011

ISBN: 978-84-694-6881-4

Aquesta obra està subjecta a una llicència Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported de Creative Commons. Per veure'n una còpia, visiteu <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> o envieu una carta a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

 Aquesta editorial és membre de la Xarxa Vives i de l'UNE, fet que garanteix la difusió i comercialització de les seves publicacions a escala estatal i internacional.

Pròleg

Part I. Àlgebra lineal

- Tema 1: Matrius i determinants
- Tema 2: Sistemes d'equacions lineals
- Tema 3: L'espai $\mathbb{R}^n$

Part II. Anàlisi real

- Tema 4: Funció real de variable real
- Tema 5: Integració

Bibliografia

Amb aquesta publicació, dirigida als meus estudiants de l'assignatura de Matemàtiques I dels graus d'Economia, Administració i Direcció d'Empreses i Finances i Comptabilitat, voldria donar-los uns apunts que els puguin ajudar a seguir millor l'assignatura. Tal com ja s'expressa al títol es tracta d'uns apunts i, per tant, són bastant esquemàtics i dirigits als estudiants que assisteixen regularment a classe. Amb aquest material voldria cobrir dos objectius principals. En primer lloc, permetre als estudiants venir a classe havent llegit prèviament el que s'explicarà a la classe següent i així poder seguir millor les explicacions. En segon lloc, donar més temps als alumnes durant la classe per poder escoltar la professora i ampliar aquests apunts amb les explicacions de classe, altres exemples i ampliacions.

Espero que aquest material compleixi els objectius indicats i pugui ser útil als meus alumnes.

Cori Vilella Bach

Part I: Àlgebra lineal

Introducció

Considereu el següent sistema d'equacions lineals

$$2x - y = 1$$

$$x - 3y = 0$$

Si escrivim la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ i el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

podem escriure el sistema inicial com a $Ax = b$. Per tant, l'estudi de les matrius es pot explicar com a un mètode per resoldre sistemes d'equacions lineals.

Tema 1: MATRIUS I DETERMINANTS

Definició

Definició: Una *matriu* $A_{m \times n}$ és una caixa de nombres reals ordenats en m files i n columnes. Escriurem:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 2 & e & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \quad 2 \quad 2) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Notació: $M_{m \times n}$ denota el conjunt de totes las matrius de m files i n columnes.

1.1 Àlgebra matricial

Definició: Sigui $A \in M_{m \times n}$. La matriu que resulta d'intercanviar les files per les columnes de A , que denotem per A^t , s'anomena matriu *transposada*.

Definició: Si $m = n$, direm que la matriu és *quadrada*.

Definició: Siguin $A, B \in M_{m \times n}$. Llavors els elements c_{ij} de la matriu $C = A \pm B$ es defineixen com a $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Definició: Sigui $A \in M_{m \times n}$. Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$. Llavors, els elements c_{ij} de la matriu $C = \lambda \cdot A$ es defineixen com a $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Observació: El conjunt $(M_{m \times n}, +, \cdot)$ és un espai vectorial de dimensió $m \times n$.

1.1 Àlgebra matricial

Definició: Sigui $A \in M_{m \times n}$ i sigui $B \in M_{n \times s}$ (és a dir, A té tantes columnes com files té B). Llavors podem considerar $C = AB$ (però, òbviament, no necesàriament BA) i els elements c_{ij} de la matriu C es defineixen com a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

1.1 Àlgebra matricial

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \times 1 = -1 & 1 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 0 = 4 \\ 3 \times 1 + 0 \times (-1) + 1 \times 1 = 4 & 3 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times 0 = 6 \end{pmatrix}$$

1.2. Determinant d'una matriu

Definició: Sigui $A \in M_{n \times n}$ una matriu **quadrada**. El **determinant** de A , que denotem per $\det(A)$ o per $|A|$, es defineix de la següent forma:

- Si $n = 1$, llavors $\det(A) = |a| = a$
- Si $n = 2$, llavors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

- Si $n = 3$ (regla de Sarrus), llavors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + hdc - (ceg + bdi + hfa)$$

1.2 Determinant d'una matriu

- Si $n \geq 3$, llavors (per exemple)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \color{red}{a_{21}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \color{red}{a_{n1}} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \times$$
$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1}$$
$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

1.2 Determinant d'una matriu. Propietats

Sigui $A \in M_{n \times n}$.

- $|A| = |A^t|$
- Si una fila (o columna) de A té tots els elements nuls, llavors $|A| = 0$
- Siguin α i β escalars.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \alpha & a_{12} \\ a_{21} + \beta & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & a_{12} \\ \beta & a_{22} \end{vmatrix}$$

- Sigui α un escalar.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1.2. Determinant d'una matriu. Propietats

- Si a una fila (o columna) de A li sumem una combinació lineal de les altres files (o columnes), el determinant no varia.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 = 1 + 2 + 3 & 2 & 3 \\ 15 = 4 + 5 + 6 & 5 & 6 \\ 24 = 7 + 8 + 9 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

És a dir $(6, 15, 24) = (1, 4, 7) + 1 \times (2, 5, 8) + 1 \times (3, 6, 9)$

- Si dues files (o columnes) de A són proporcionals, llavors $|A| = 0$

1.3 Rang d'una matriu (menors)

Definició: Sigui $A \in M_{m \times n}$. Anomenem *menor d'ordre k* el determinant $k \times k$ (amb $k \leq \min\{m, n\}$) de qualsevol submatriu que resulti de prendre k files i k columnes de A .

Exemple: Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

- Menors d'ordre 1: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12.
- Menors d'ordre 2:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & 3 & 4 \\ \color{red}{5} & \color{red}{6} & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4$$

1.3 Rang d'una matriu (menors)

- Menors d'ordre 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{vmatrix} = -16$$

- Menors d'ordre 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 690$$

- Menors d'ordre 4: No n'hi ha.

1.3 Rang d'una matriu

Definició: Sigui $A \in M_{m \times n}$. Anomenem *rang de A*, i denotem per $\text{Rg}(A)$, a l'ordre del menor més gran no nul.

Exemple: Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

- Ordre 4: No n'hi ha. $\text{Rg}(A) < 4$
- Ordre 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -72 \neq 0$$

$\text{Rg}(A) \geq 3$ i $\text{Rg}(A) < 4$; per tant, $\text{Rg}(A) = 3$

1.3 Rang d'una matriu

Exemple (amb paràmetres): Sigui $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Calculeu

$\text{Rg}(A)$ en funció del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.

- Sabem que $1 \leq \text{Rg}(A) \leq 2$
- Ordre 1: $2 \neq 0$. $\text{Rg}(A) \geq 1$
- Ordre 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3a, \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6a$$

Si $a \neq 2/3$, llavors $\text{Rg}(A) = 2$

Si $a = 2/3$, llavors $\text{Rg}(A) = 1$

1.4 Matriu inversa

Definició: Sigui $A \in M_{n \times n}$ una matriu quadrada *no singular* (és a dir, amb determinant diferent de zero). Anomenarem *matriu inversa* de A la matriu A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \text{Id}_{n \times n}$$

on Id és la *matriu identitat* (és a dir, $a_{ii} = 1$ per a tot i , i $a_{ij} = 0, i \neq j$).

Definició: Sigui $A \in M_{n \times n}$ una matriu quadrada. Anomenarem *matriu adjunta*, i denotem per $\text{Adj}(A)$, la matriu

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

on A_{ij} és el resultat de multiplicar el menor que s'obté d'eliminar la fila i i la columna j , de la matriu A , per $(-1)^{i+j}$

1.4 Matriu inversa

Exemple: Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\bullet A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\bullet A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\bullet A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\bullet A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

1.4 Matriu inversa

Teorema: Sigui $A \in M_{n \times n}$ no singular. Llavors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)^t$$

Exemple: Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Llavors

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici: Comproveu que efectivament $AA^{-1} = \text{Id}$.

2.1 Definició

Un sistema d'equacions lineals s'escriu:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o, $Ax = b$

A és la *matriu del sistema*, b són els *térms independents*, i x són les *incògnites*.

A més, la matriu $\overline{A}$, que es defineix afegint a la matriu A la columna b , s'anomena *matriu ampliada del sistema*; és a dir:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

2.2 Classificació dels sistemes

- Sistema compatible (té solució).
 - Compatible determinat (té solució única).
 - Compatible indeterminat (té infinites solucions).
- Sistema incompatible (no té solució).

2.3 Resolució de sistemes. Teorema de Rouché–Frobenius

Teorema: Sigui $Ax = b$ un sistema d'equacions lineals, on $A \in M_{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, i $x \in \mathbb{R}^n$.

- Si $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(\bar{A})$, el sistema és compatible. A més,
 - Si $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(\bar{A}) = n$, el sistema és compatible determinat.
 - Si $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(\bar{A}) < n$, el sistema és compatible indeterminat.
Direm que $n - \text{Rg}(A)$ és el *grau de llibertat*.
- Si $\text{Rg}(A) < \text{Rg}(\bar{A})$, el sistema és incompatible.

2.3 Teorema de Rouché–Frobenious

Exemple: Discutiu la solució del sistema d'equacions

$$\begin{array}{rrcr} 3x & +2y & +4z & = 1 \\ x & +4y & & = 2 \end{array}$$

Com que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, tenim que $\text{Rg}(A) = 2$ i, per tant,

$\text{Rg}(\bar{A}) = 2 < 3$. Sistema compatible indeterminat (amb 1 grau de llibertat).

Observació: Les equacions $3x + 2y + 4z = 1$ i $x + 4y = 2$ corresponen a plans de $\mathbb{R}^3$ que es creuen en una recta (1 grau de llibertat).

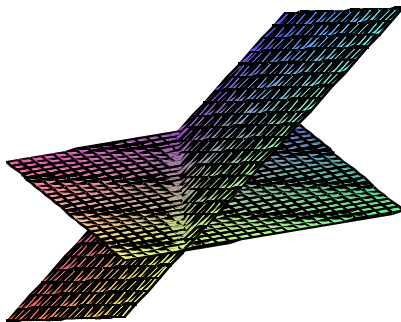


Figura: Dos plans de $\mathbb{R}^3$ es tallen en una recta.

2.3 Resolució de sistemes

Observació: Per a sistemes d'equacions lineals de baixa dimensió sempre podem utilitzar els mètodes *tradicionals* de *reducció*, *igualació i substitució*. Però què fem si el sistema té dimensions més grans?

- Mètode de triangulació de Gauss.
- Mètode de Cramer.

2.3 Resolució de sistemes. Mètode de Cramer

Un sistema d'equacions lineals $Ax = b$ és un *sistema de Cramer* si i només si:

- nombre d'equacions = nombre d'incògnites
- $\text{Det}(A) \neq 0$

Observació: Si un sistema és de Cramer, llavors és compatible. No tot sistema compatible és de Cramer, però podem transformar-lo en un que sigui de Cramer.

2.3 Resolució de sistemes. Mètode de Cramer

La resolució d'un sistema de Cramer $Ax = b$ es determina per:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

És a dir, cada component x_i de la solució és el resultat de dividir, pel determinant de la matriu A , el determinant de la matriu que resulta de substituir la columna i -èssima de la matriu A per la columna dels termes independents.

2.3 Resolució de sistemes. Mètode de Cramer

Exemple:

$$\begin{array}{rrcr} x & +y & +z & = 1 \\ 2x & +y & +z & = 2 \end{array}$$

llavors

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Podem comprovar que $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(\bar{A}) = 2$. Per tant, el sistema és compatible indeterminat; però no és de Cramer, ja que $n = 3 \neq m = 2$ cal arreglar-lo perquè sigui de Cramer.

2.3 Resolució de sistemes. Mètode de Cramer

Continuació de l'exemple:

$$\begin{array}{rrcr} x & +y & +z & = 1 \\ 2x & +y & +z & = 2 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Considerem aquesta matriu amb determinant diferent de zero com a matriu del nou sistema, i les components de la variable z les considerem com a termes independents. El "nou sistema" de Cramer serà:

$$\begin{array}{rrcr} x & +y & & = 1 - z \\ 2x & +y & & = 2 - z \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - z & 1 \\ 2 - z & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

i

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - z \\ 2 & 2 - z \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{z}{-1} = -z$$

Per tant, les solucions són: $(1, -z, z)$

Tema 3: L'ESPAI $\mathbb{R}^n$

3.1 Operacions amb vectors

Definim $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$.

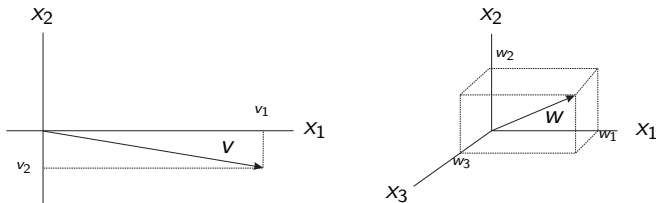


Figura: Visió geomètrica de $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ i $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$

3.1 Suma i producte per un escalar

Siguin $u, v \in \mathbb{R}^n$, i sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ (que anomenarem *escalar*). Definim les operacions:

- $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$. S'anomena *operació interna*.
- $\lambda \cdot u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)$. S'anomena *operació externa*.

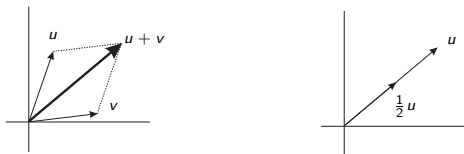


Figura: Visió geomètrica de la suma (de vectors) i producte per un escalar. El conjunt $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ es denomina *espai vectorial* i, conseqüentment, els seus elements es denominen *vectors*.

3.2 Dependència i independència lineal de vectors

Definició: Un conjunt de vectors $\{u_1, \dots, u_k\}$, $u_i \in \mathbb{R}^n$ s'anomena un *sistema de vectors*.

Definició: Direm que $u, v \in \mathbb{R}^n$ són vectors *linealment dependents (LD)* si existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda u$ (o $u = \lambda v$). Direm que són vectors *linealment independents (LI)* en cas contrari (és a dir, $v \neq \lambda u$, per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$).

Exemple: Els vectors $u = (1, 2)$ i $v = (-1, -3)$ són LI, mentre que els vectors $u = (-1, 2)$ i $v = (1, -2)$ són LD.

3.2 Combinació lineal de vectors

Definició: Sigui $\{u_1, \dots, u_k\}$ un sistema de vectors de $\mathbb{R}^n$. Una *combinació lineal* del sistema consisteix a escollir k escalars arbitraris $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ per a obtenir un nou vector:

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \in \mathbb{R}^n$$

Exemple: Sigui $\{u_1, u_2\}$, amb $u_1 = (1, 2, 2)$ i $u_2 = (2, 3, -1)$.
Llavors

$$2u_1 + 3u_2 \qquad -u_1 + \sqrt{2}u_2$$

són dues combinacions lineals dels vectors u_1 i u_2 .

3.2 Dependència lineal de vectors

Definició: Sigui $\{u_1, \dots, u_k\}$ un sistema de vectors. Direm que és un sistema *linealment dependent LD* si existeixen k escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, no tots zero, tals que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \equiv 0$$

(és a dir, la combinació lineal dóna el vector $\vec{0}$).

Definició: Sigui $\{u_1, \dots, u_k\}$ un sistema de vectors. Direm que és un sistema *linealment independent LI* si l'única combinació lineal de k escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tals que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \equiv 0$$

és $\lambda_i = 0$ per a tot $i = 1, \dots, k$

3.3 Sistemes de vectors generadors

Definició: Sigui $\{u_1, \dots, u_k\}$ un sistema de vectors de $\mathbb{R}^n$.

Denotem per $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ al conjunt de totes les combinacions lineals del sistema; és a dir:

$$\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Definició: Direm que $\{u_1, \dots, u_k\}$, on $u_i \in \mathbb{R}^n$, és un sistema (de vectors) *generador* de $\mathbb{R}^n$ si $\langle u_1, \dots, u_k \rangle \equiv \mathbb{R}^n$.

Exemple: El sistema $\{u_1, u_2, u_3\}$, amb $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (2, 3)$ i $u_3 = (2, 5)$, és un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

Exemple: El sistema $\{u_1, u_2\}$, amb $u_1 = (1, 2)$ i $u_2 = (-2, -4)$, no és un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

3.4 Bases i dimensió d'un espai vectorial

Definició: Un sistema de vectors de $\mathbb{R}^n$ direm que és una *base* de $\mathbb{R}^n$ si és LI i és generador de $\mathbb{R}^n$.

Proposició: Un sistema de vectors $\{u_1, \dots, u_k\}$, on $u_i \in \mathbb{R}^n$, és una base si i només si $k = n$, i és un sistema LI.

Definició: Direm doncs que n és la *dimensió* de $\mathbb{R}^n$ (el nombre mínim de vectors LI que calen perquè el sistema sigui generador).

Observació: Existeixen infinites bases diferents, però totes tenen el mateix nombre de vectors.

3.4 Bases i dimensió d'un espai vectorial

Exemple: El sistema $\{(0, 2, 3), (-1, -2, 0), (0, 0, 1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple: El sistema $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$. S'anomena *base canònica* i s'escriu $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Teorema: Sigui $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Tot vector de $\mathbb{R}^n$ s'escriu de manera única com a combinació lineal del sistema. És a dir, per a tot $v \in \mathbb{R}^n$ existeix una única n-tupla d'escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tal que

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

D'aquesta n-tupla se'n diu *coordenada del vector v en la base $\{u_1, \dots, u_n\}$* .

3.5 Dependència lineal i rang d'una matriu

Teorema: Sigui $\{u_1, \dots, u_k\}$ vectors de R^n . Sigui A la matriu formada pels vectors en columnes (o files). Llavors $\text{Rg}(A) = m$ si i només si el sistema té com a màxim m vectors LI. A més el menor que determina el rang forma un sistema de m vectors LI.

3.5 Determinants i bases de $\mathbb{R}^n$

Teorema: Un sistema de n vectors de $\mathbb{R}^n$ és base si i només si el determinant de la matriu que formen (normalment s'escriuen els vectors en columnes) és diferent de zero.

Exemple: El sistema $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$ no és una base de $\mathbb{R}^3$, ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - (105 + 72 + 48) = 0$$

3.5 Determinants i bases de $\mathbb{R}^n$

Observació: Hem vist que els determinants (que només s'apliquen a les matrius quadrades!) permeten comptar vectors linealment independents (quan hi ha tants vectors com dimensió).

Observació: ¿Es pot estendre aquesta noció? És a dir, si tenim k vectors de $\mathbb{R}^n$ ¿podrem saber quin és el nombre màxim de vectors LI? ¿Podrem obtenir un subconjunt amb aquest nombre màxim? L'eina per poder respondre aquestes preguntes és el que coneixem com a *rang d'una matriu*.

3.6 Producte escalar de vectors

Definició: Direm *producte escalar de vectors* u i v , on
 $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ a

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Exemple: Donats $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 1, -1)$,

$$\langle u, v \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 2$$

3.7 Norma i distància

Definició: Direm *norma d'un vector* $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ i es representa per $\| u \|$ al valor:

$$\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Definició: Direm que un vector $u \in \mathbb{R}^n$ és *unitari*, si $\| u \| = 1$.

Exemple: Donat $u = (1, 3)$, $\| u \| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

Donat $v = (0, 1, 0, 0)$, $\| v \| = \sqrt{0 + 1 + 0 + 0} = 1$ és un vector unitari.

Definició: Definim *distància entre dos vectors* u i v de $\mathbb{R}^n$ com a $d(u, v) = \| u - v \|$.

3.8 Base ortogonal

Definició: Donats dos vectors u i v de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Direm que u i v són *ortogonals o perpendiculars* ($\perp$) si i només si $\langle u, v \rangle = 0$.

Exemple: Donats $\{u = (1, 1), v = (1, 0)\}$, $\langle u, v \rangle = 1 \neq 0$; per tant, no són perpendiculars.

Donats $u = (1, 1), v = (1, -1)$, $\langle u, v \rangle = 0$ i per tant, són vectors perpendiculars.

Definició: Un sistema de vectors $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ és una *base ortogonal de $\mathbb{R}^n$* si i només si són base i són ortogonals dos a dos.

Exemple: $\{(1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ és una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Exemple: $\{(1, 3), (2, -1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^2$ però no és una base ortogonal.

4.1 Els nombres reals

Els nombres es classifiquen de la següent forma:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- ❶ Els nombres *naturals*: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- ❷ Els nombres *enters*: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- ❸ Els nombres *racionals*: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ } q \neq 0\}$, (admeten una representació decimal finita o periòdica).
- ❹ Els nombres *reals*: Són el conjunt $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, on $\mathbb{I}$ són els anomenats nombres *irracionals* (aquells que tenen una representació decimal infinita no periòdica). Per exemple,

$$\{\sqrt{2} = 1.41421\dots, \pi = 3.141592\dots, e = 2.7183\dots\}$$

Així, doncs, $\mathbb{R}$ coincideix amb tots els nombres que tenen expressió decimal (finita o infinita).

4.1 (L'àlgebra dels) nombres reals

Siguin $a, b \in \mathbb{R}$. Siguin $n, m \in \mathbb{N}$.

- $a \pm b \in \mathbb{R}$
- $a \times b \in \mathbb{R}$
- $a/b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$
- $a^0 = 1$
- $a^n = a \times \dots \times a$ (n cops)
- $a^{n+m} = a^n a^m$
- $a^{n-m} = a^n a^{-m} = \frac{a^n}{a^m}$
- $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} \rightarrow (2^{1/2} = \sqrt{2})$
- $(ab)^n = a^n b^n$ però $((a+b)^n \neq a^n + b^n)$

4.2 La recta real

Els nombres reals es representen amb una recta; d'aquesta recta se'n diu *recta real*.

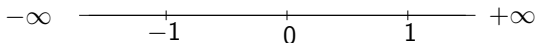


Figura: La recta real.

Sabem que $x < y$ si i només si x és més a l'esquerra que y en la recta real. I també sabem que $d(x, y)$ és la longitud del segment que uneix x amb y .

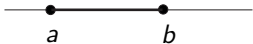
4.2 La recta real. Intervals i entorns

Els *intervals* i els *entorns* són subconjunts dels nombres reals del tipus següent:

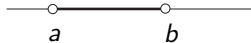
- Interval tancat: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Interval obert: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Entorn: $E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) := |x - a| < r\}$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

4.2 La recta real. Intervals i entorns



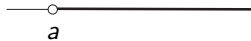
(a) Interval tancat: $[a, b]$



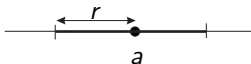
(b) Interval obert: (a, b)



(c) Interval tancat: $[a, \infty)$

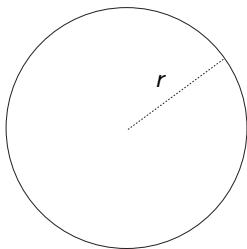


(d) Interval obert: (a, ∞)

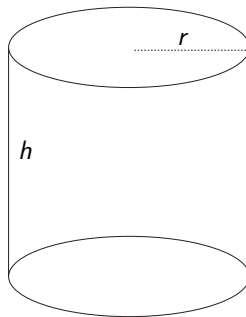


(e) Entorn (obert): $E(a, r)$

4.3 Funcions d'una variable real. Introducció



(a) $S(r) = \pi r^2$



(b) $S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Figura: La superfície d'un cercle és una funció del radi. La superfície d'un cilindre és una funció del radi i de l'alçada.

4.3 Funcions d'una variable real

Una *funció* $f : A \rightarrow B$ és una correspondència que assigna a cada element $a \in A$ un (i només un) element del conjunt B , que denotem per mitjà de $f(a)$. Es diu que $f(a)$ és la *imatge* de a per f .

Si $A \subset \mathbb{R}$ i $B = \mathbb{R}$ diem que f és una *funció real de variable real*.

$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

El conjunt A , on té sentit la funció, s'anomena *domini* de f . És a dir, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists f(x)\}$.

4.3 Funcions d'una variable real

Per exemple, una expressió concreta d'una funció $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és:

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad \leftrightarrow \quad y = x^2 + x + 1$$

de forma que la imatge d'un nombre real qualsevol x és un nombre real que denotem per mitjà de $f(x)$ o també per mitjà de y .

$$x = 10 \quad \rightarrow \quad f(10) = 10^2 + 10 + 1 = 111$$

$$x = h \quad \rightarrow \quad f(h) = h^2 + h + 1$$

$$x = 3h + 2 \quad \rightarrow \quad f(3h + 2) = \dots \text{exercici}$$

4.4 Funcions d'una variable real. Gràfica

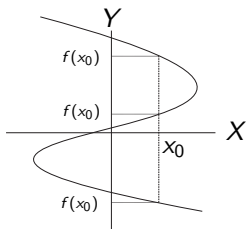
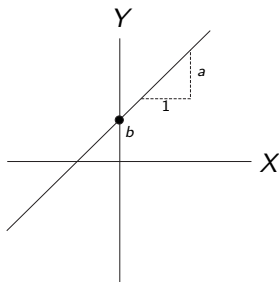


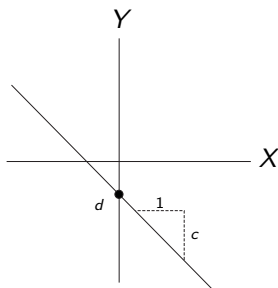
Figura: La corba d'aquest dibuix no pot ser la gràfica d'una funció, ja que hi hauria punts amb més d'una imatge.

4.5 Funcions elementals. Funcions lineals

La seva expressió general és $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, i el domini és tot $\mathbb{R}$.



(i) $y = ax + b$



(ii) $y = cx + d$

Figura: (i) pendent positiu, (ii) pendent negatiu.

4.5 Funcions elementals. Funcions lineals

Recordeu que quan resollem sistemes d'equacions lineals

$$3x + y = 1$$

$$2x - y = 10$$

el que fem és trobar la intersecció de dues rectes al pla. Així, només hi ha tres casos:

- Sistema compatible determinat (una solució). Són rectes transversals.
- Sistema compatible indeterminat (infinites solucions). Són la mateixa recta.
- Sistema incompatible (cap solució). Són rectes paral·leles.

4.5 Funcions elementals. Funcions polinomials

La seva expressió general és

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1$$

i el domini és tot $\mathbb{R}$.

Si $n = 2$, tenim el cas *quadràtic*. La seva expressió general és

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

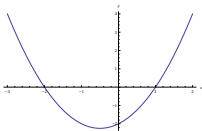
Els talls de la seva gràfica amb l'eix d'abscisses (és a dir, els zeros o arrels) són les solucions de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2a} \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right), & \text{si } b^2 - 4ac > 0; \\ x = \frac{-b}{2a}, & \text{si } b^2 - 4ac = 0; \\ \emptyset, & \text{si } b^2 - 4ac < 0. \end{cases}$$

4.5 Funcions elementals. Funcions polinomials quadràtiques

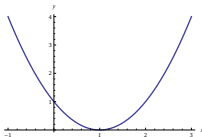
La gràfica d'un polinomi de segon grau és una *paràbola*.
Considerem $a > 0$.

$$y = x^2 - x - 2$$



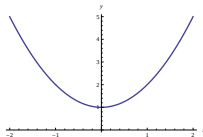
(a) $b^2 - 4ac > 0$

$$y = (x - 1)^2$$



(b) $b^2 - 4ac = 0$

$$y = x^2 + 1$$



(c) $b^2 - 4ac < 0$

4.5 Funcions elementals. Funcions racionals

La seva expressió general és

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ on } P, Q \text{ polinomis}$$

El domini és $D(R(x)) = \mathbb{R} \setminus \{\text{zeros de } Q\}$.

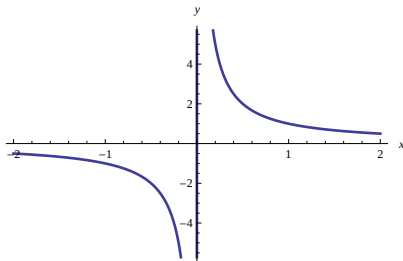


Figura: La gràfica de la funció racional $y = \frac{1}{x}$.

4.5 Funcions elementals. Funció valor absolut

La seva expressió és

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

El seu domini és $\mathbb{R}$. I la seva gràfica és

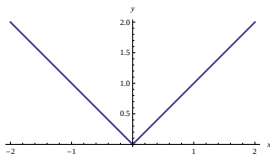
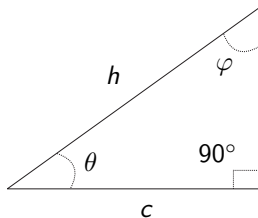


Figura: La gràfica de la funció valor absolut. En el punt $x = 0$ la funció hi té un colze.

4.5 Funcions elementals. Funcions trigonomètriques



$$h^2 = s^2 + c^2$$

$$\sin \theta = \frac{s}{h} = \frac{\text{c.oposat}}{h}$$

$$\cos \theta = \frac{c}{h} = \frac{\text{c.contigu}}{h}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\text{c.oposat}}{\text{c.contigu}}$$

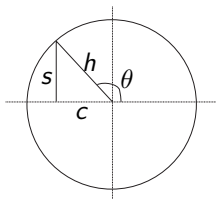


Figura: Les funcions trigonomètriques bàsiques definides per a tot $\theta \in [0, 2\pi]$.

4.5 Funcions elementals. Funcions trigonomètriques i fórmules trigonomètriques

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

4.5 Funcions elementals. Funcions trigonomètriques i angles

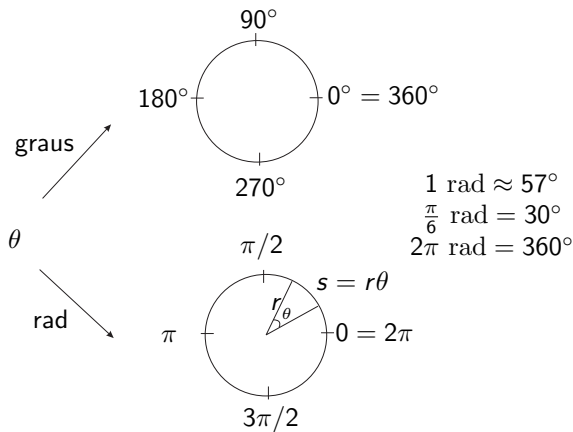
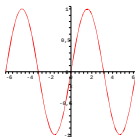


Figura: Les unitats dels angles.

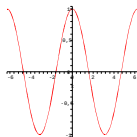
4.5 Funcions elementals. Funcions trigonomètriques i angles

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1	0	1
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

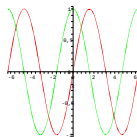
4.5 Funcions elementals. Gràfica de les funcions trigonomètriques



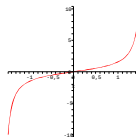
(a) $\sin(x)$



(b) $\cos(x)$

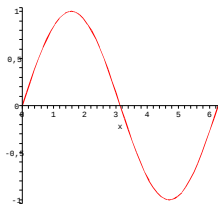


(c) $\cos(x)$ i $\sin(x)$

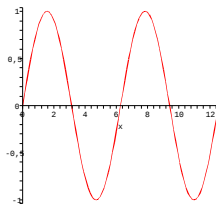


(d) $\tan(x)$

4.5 Funcions elementals. Funcions trigonomètriques i periodicitat



(e) $\sin(x)$, $x \in (0, 2\pi)$



(f) $\sin(x)$, $x \in (0, 4\pi)$

Les funcions $\sin(x)$, $\cos(x)$ i $\tan(x)$ són funcions periòdiques (de període 2π).

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4.5 Funcions elementals. (Altres) funcions trigonomètriques

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\arcsin(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x$$

$$\arccos(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x$$

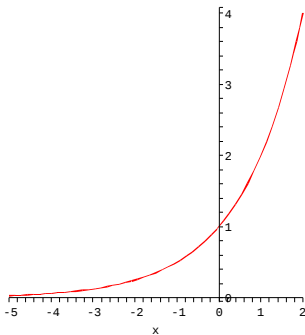
$$\arctan(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x$$

4.5 Funcions elementals. La funció exponencial

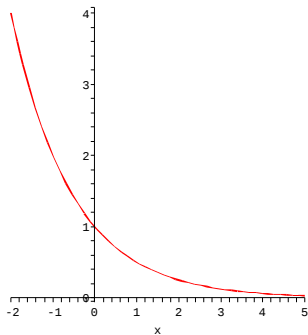
Ja sabem que si $a \in \mathbb{R}$ llavors $a^m = a \times \dots \times a$, m vegades.

També sabem que si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, llavors $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. Però ¿quan val, per exemple, $a^{\sqrt{2}}$?

Sigui $a > 0$. Definim $y = a^x$ (on $x \in \mathbb{R}$) com *la funció exponencial*. El seu domini és $\mathbb{R}$ i la seva gràfica és:



(g) $y = a^x$, $a > 1$



(h) $y = a^x$, $0 < a < 1$

4.5 Funcions elementals. La funció exponencial $f(x) = e^x$

Recordem que ($a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$):

- $a^x > 0$, $a^0 = 1$
- $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

Per moltes raons, el cas $a = e$ (per tant, la funció $y = e^x$) és la funció exponencial més important.

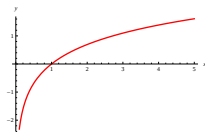
Recordem que $e = 2.718281 \dots$

4.5 Funcions elementals. Funció logaritme

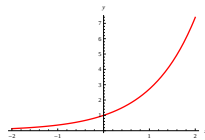
La seva expressió general és $y = \log_a x$, $a > 0$ i compleix que:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Per tant, és clar que el seu domini és $\mathbb{R}^+$ ($x = 0$ no és del domini). El cas $a = e$ s'anomena *logaritme neperià*. S'escriu $y = \ln x$, i la seva gràfica és:



(i) $y = \ln x$



(j) $y = e^x$

4.5 Funcions elementals. Propietats de la funció logaritme

Les propietats del logaritme són heretades de la seva relació amb la funció exponencial.

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$
- $\ln(x^y) = y \ln x$ (alerta!! $\ln(x^y) \neq \ln^y x$)
- $\ln e^x = x$, $\ln e = 1$, i $\ln 1 = 0$

4.6 Operacions amb funcions

- *Suma:* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$D(f + g) = D(f) \cap D(g)$$

- *Producte:* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$$

- *Quocient:* $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$D(f/g) = D(f) \cap D(g) \setminus \{ \text{zeros de } g \}$$

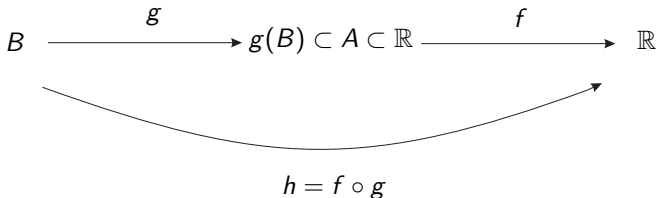
4.7 Operacions amb funcions

- *Composició de funcions:* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Siguin $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Suposem que $g(B) \subset A$.

La *composició* de f amb g és la funció $h = f \circ g : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$



4.6 Operacions amb funcions

Mirant la definició de la composició queda clar que no es tracta d'una operació commutativa. Veiem-ho amb un exemple:

Siguin $f(x) = x^2$ i $g(x) = e^x$. Llavors:

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = (e^x)^2 = e^{2x}$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = e^{x^2}$

Si denotem per $h_1(x) = (f \circ g)(x)$ i per $h_2(x) = (g \circ f)(x)$, tenim que:

- $h_1(3) = e^6$
- $h_2(3) = e^9$

Per tant, $h_1(3) \neq h_2(3)$.

4.7 Límits i continuïtat

Definició: Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i sigui $x_0 \in A$. Diem que $L \in \mathbb{R}$ és *el límit (de f) quan x tendeix a x_0* , si $f(x)$ tendeixen a L quan x tendeix a x_0 . Escrivim:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Com que tenim dues formes per acostar-nos (dins de la recta real) a $x = x_0$, parlem de límits laterals ($x \rightarrow x_0^+$ vol dir que $x > x_0$):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

4.7 Límits i continuïtat

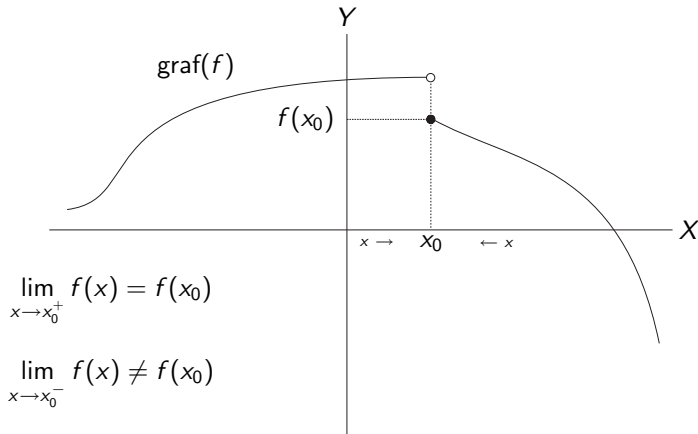
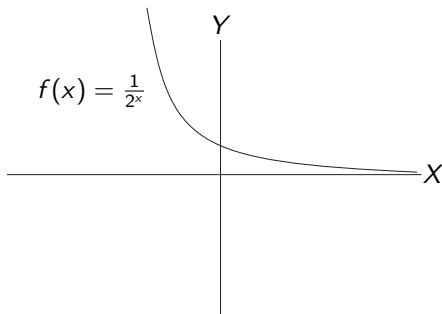


Figura: Per a aquesta funció no existeix el límit (global), ja que els límits laterals no coincideixen.

4.7 Límits i continuïtat

Si volem estudiar el comportament d'una funció f per a valors de x arbitràriament grans (si el domini ho permet), estudiarem els següents límits:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

4.7 Límits i continuïtat

L'aritmètica de l'infinit:

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \times \infty = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

I les *indeterminacions*

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

4.7 Límits i continuïtat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \times (-\infty) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \times \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} - x = \infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+1} - x = \infty - \infty = 0$$

4.7 Límits i continuïtat

Definició: Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i sigui $x_0 \in A$. Diem que f és *contínua en x_0* si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diem que f és *contínua en A* si és contínua en tot punt de A .

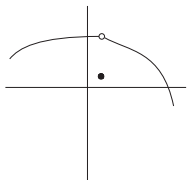
Observació: Les funcions que hem estudiat (polinòmiques, racionals, trigonomètriques, exponencials i logarítmiques) són funcions contínues (en els seus corresponents dominis).

Observació: La suma, el producte, el quocient i la composició de funcions contínues són també funcions contínues (allà on estiguin definides).

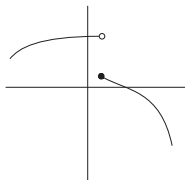
4.7 Límits i continuïtat

- La funció $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ és contínua a tot $\mathbb{R}$.
- La funció $f(x) = x + \sin(\ln(x))$ és contínua a $\mathbb{R}^+$.
- La funció $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$ és contínua a....**exercici**.

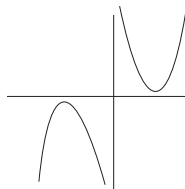
4.7 Límits i continuïtat. Tipus de discontinuïtats



(a) Evitable.



(b) Salt.



(c) Asimptòtica.

4.8 Teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano: Donada una funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ i $f(a)f(b) < 0$, llavors existeix un $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Apliquem el teorema de Bolzano per localitzar solucions d'equacions.

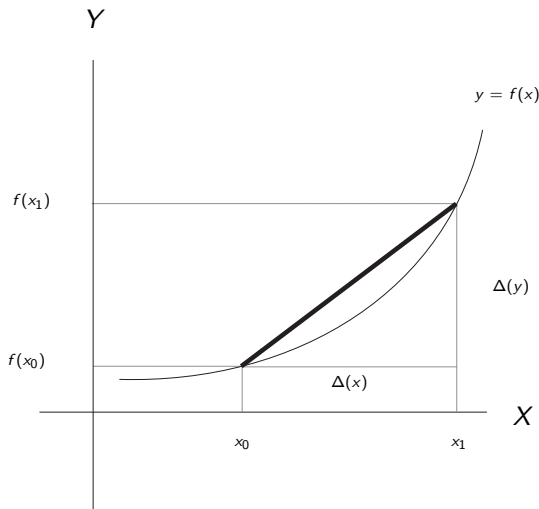
Exercici: Proveu que l'equació $x^{2^x} = 1$ té almenys una solució positiva menor que 1.

4.9 Teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass: Donada una funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$, llavors $f(x)$ té un màxim i un mínim absolut en $[a, b]$.

És a dir, existeixen α_1 i $\alpha_2 \in [a, b]$ tals que
$$f(\alpha_1) \leq f(x) \leq f(\alpha_2), \quad \forall x \in [a, b]$$

4.10 Noció de derivada. Interpretació geomètrica I



$$f'(x_0) := \lim_{\Delta(x) \rightarrow 0} \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

4.10 Noció de derivada. Interpretació geomètrica II

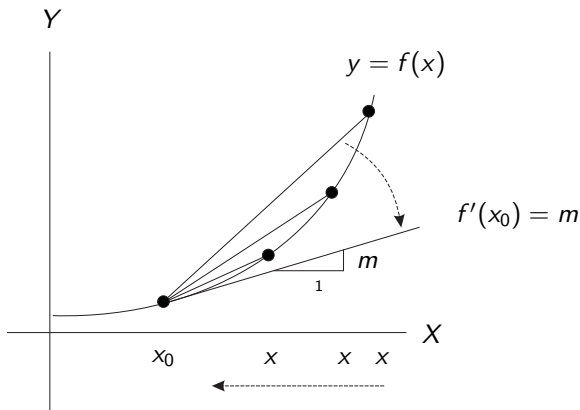


Figura: La derivada de f en un punt $x = x_0$, és a dir $f'(x_0)$, és el pendent de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en x_0 .

4.10 Derivació (interpretació geomètrica III)

Qüestió: Quina és l'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt $x = x_0$?

- 1 El seu pendent és $m = f'(x_0)$.
- 2 Ha de passar pel punt $(x_0, f(x_0))$.

Exercici: L'equació de la recta tangent és

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

4.10 Noció (formal) de derivada

Definició: Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, A obert, i sigui $x_0 \in A$. Diem que f és *derivable en x_0* , i escrivim $f'(x_0)$, si existeix el límit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

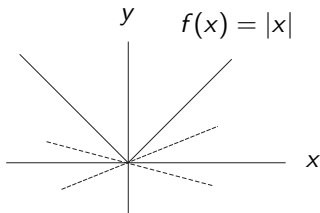
Definició: Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, A obert. Diem que f és *derivable en A* , i escrivim $f'(x)$, $x \in A$, si és derivable en tot punt de A .

4.10 Noció de derivada. Derivació i continuïtat

Teorema: Si una funció és derivable en un punt x_0 , llavors és contínua en aquest punt. És a dir,

$$\text{Si } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Observació: El recíproc no és cert. La funció $f(x) = |x|$ és contínua en tot punt del domini, $\mathbb{R}$, però no és derivable en $x = 0$ (si ho és en tot altre punt).



4.10 Funcions derivables. Regles de derivació

Observació: Les funcions que hem estudiat (polinòmiques, racionals, trigonomètriques, exponencials i logarítmiques) són funcions derivables (en els seus corresponents dominis) i les seves derivades són:

$$f(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = \ln a \, a^x$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \arcsin x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos x$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

...

...

4.10 Funcions derivables. Regles de derivació

Observació: La suma, el producte, el quocient i la composició de funcions derivables són també funcions derivables (allà on estiguin definides). Siguin f i g derivables en A .

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$
- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$ (regla de la cadena).

Exemple:

$$[\ln(\tan(1+x^2))]' = \frac{1}{\tan(1+x^2)} \times (1 + \tan^2(1+x^2)) \times 2x$$

4.10 Funcions derivables. Regles de derivació

Qüestió: ¿Com es calcula la derivada de la funció $h(x) = f(x)^{g(x)}$?

Exemple: Calculem la derivada de $h(x) = x^{\sin(x)}$. Primer observem que $\ln(h(x)) = \sin(x) \ln(x)$. Si derivem als dos costats tindrem

$$\frac{1}{h(x)} h'(x) = \cos(x) \ln(x) + \frac{1}{x} \sin(x)$$

I, per tant,

$$h'(x) = \left(\cos(x) \ln(x) + \sin(x) \frac{1}{x} \right) x^{\sin(x)}$$

4.10 Funcions derivables. Derivades successives

Ja sabem que, si $f(x)$ és derivable, podem calcular $f'(x)$. De la mateixa forma, si $f'(x)$ també es derivable, podem repetir el procés i calcular $(f')'(x)$. Ho denotem per

$$f''(x) := (f')'(x)$$

Exemple: Si $f(x) = xe^x$, llavors $f'(x) = e^x(x + 1)$ i, per tant, $f''(x) = e^x(x + 2)$.

En general escrivim $f^{(n)}(x)$, quan calculem la derivada n -èsima de f .

Exercici: Si $f(x) = xe^x$, calculeu $f^{(n)}(x)$, $n \geq 1$.

4.10 Aplicacions de la derivada. La regla de l'Hôpital

Teorema de l'Hôpital: Siguin $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcions derivables.
Suposem que

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ o $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$
- Existeix el límit: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Llavors:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.10 Aplicacions de la derivada. La regla de l'Hôpital.

Exemple: Calculeu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Apliquem l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Un altre cop:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

4.10 Aplicacions de la derivada. Elasticitat d'una funció

$$E_x f(x_0) = f'(x_0) \frac{x_0}{f(x_0)}$$

Tipus d'elasticitat:

- *Elasticitat unitària* $\Leftrightarrow |E_x f(x_0)| = 1$.
- *Elasticitat rígida o inelàstica* $\Leftrightarrow |E_x f(x_0)| < 1$.
- *Elasticitat elàstica* $\Leftrightarrow |E_x f(x_0)| > 1$.

Exercici: Donada la funció $f(x) = e^{ax} \sqrt{bx}$, comproveu que $E_x f(x) = ax + \frac{1}{2}$.

4.11 Aplicacions de la derivada. Intervals de creixement

Definició: Diem que f és **creixent** en un interval I si: quan $x, y \in I$ amb $x < y$, llavors $f(x) \leq f(y)$. Diem que f és **decreixent** en un interval I si: quan $x, y \in I$ amb $x < y$, llavors $f(x) \geq f(y)$.

Teorema: Sigui f derivable en I . Llavors

- f és creixent en I si i només si $f'(x) \geq 0$ per a tot $x \in I$.
- f és decreixent en I si i només si $f'(x) \leq 0$ per a tot $x \in I$.
- f és constant en I si i només si $f'(x) \equiv 0$ per a tot $x \in I$.

4.11 Aplicacions de la derivada. Intervals de creixement

Exemple: Calculeu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = x^3 - x$.

La derivada és $f'(x) = 3x^2 - 1$. Per tant, si resollem $3x^2 - 1 = 0$, obtindrem $x = \pm\sqrt{1/3}$. En conseqüència:

- $(-\infty, -\sqrt{1/3})$ creix.
- $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$ decreix.
- $(\sqrt{1/3}, \infty)$ creix.

4.11 Aplicacions de la derivada. Intervals de creixement

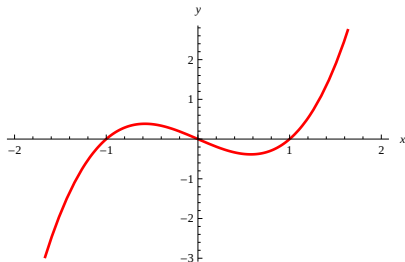


Figura: Gràfica de la funció $f(x) = x^3 - x$.

4.11 Aplicacions de la derivada. Màxims i mínims relatius o locals

Definició: Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i sigui $x_0 \in A$. Diem que x_0 és un *màxim local* de f en A , si existeix $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ per a tot $x \in E(x_0, r)$.

Definició: Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i sigui $x_0 \in A$. Diem que x_0 és un *mínim local* de f en A , si existeix $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ per a tot $x \in E(x_0, r)$.

Definició: Els màxims i mínims locals els anomenem *extrems locals*.

Observació: Alerta! La noció de màxim i mínim local no requereix que la funció sigui derivable (ni tan sols contínua).

4.11 Aplicacions de la derivada. Màxims i mínims

Definició: Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en A , i sigui $x_0 \in A$.
Diem que x_0 és un *punt crític* si $f'(x_0) = 0$.

Teorema (condicions de primer ordre o necessàries): Sigui
 $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en A . Si x_0 és un extrem local de f en A ,
llavors $f'(x_0) = 0$. El recíproc no és cert.

4.11 Aplicacions de la derivada. Màxims i mínims

Teorema (condicions de segon ordre o suficients): Sigui

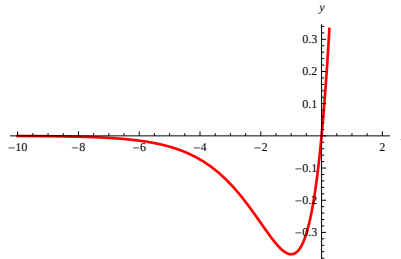
$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n vegades derivable en A , i sigui $x_0 \in A$ tal que $f'(x_0) = 0$. Suposem que $f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ i $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ per algun $n \geq 2$. Llavors

- Si n és parell, llavors
 - si $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 és un mínim local.
 - si $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 és un màxim local.
- Si n és senar, llavors x_0 no és un extrem local i s'anomena un *punt d'inflexió*.

Observació: Si $f'(x_0) \neq 0$ però $f''(x_0) = 0$, també direm que x_0 és un punt d'inflexió (com veurem, és un punt on la funció passa de còncava a convexa o viceversa).

4.12 Aplicacions de la derivada. La gràfica d'una funció

Exemple: Volem estudiar la gràfica de la funció $f(x) = xe^x$.



4.12 Aplicacions de la derivada. La gràfica d'una funció

Domini: Tots els reals. A més a més $f(x) > 0$, si $x > 0$, i $f(x) < 0$, si $x < 0$ (l'únic tall amb els eixos és el punt $(0, 0)$).

Màxims i mínims. Creixement i decreixement:

$f'(x) = e^x(x + 1)$. Per tant, $x = -1$ és l'únic possible extrem local de f . A més a més:

- $f' < 0$ en $(-\infty, -1) \Rightarrow f$ decreix en $(-\infty, -1)$.
- $f' > 0$ en $(-1, \infty) \Rightarrow f$ creix en $(-1, \infty)$.

El punt $x = -1$ és un mínim local. Alternativament, com que $f''(x) = e^x(x + 2)$, llavors $f''(-1) = e^{-1} > 0$.

4.12 Aplicacions de la derivada. La gràfica d'una funció

Límits infinits:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^x = \infty * \infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = (-\infty) * 0 = -0$$

on el segon límit surt aplicant Hôpital (exercici). Diem que $x = 0$ és una *asímtota horitzontal* de f .

4.12 Aplicacions de la derivada. La gràfica d'una funció

Concavitat i convexitat: Sigui $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dues vegades derivable en I . Direm que és **convexa**, si $f''(x) > 0$ per a tot $x \in I$. Si $f''(x) < 0$ per a tot $x \in I$, direm que f és **còncava**. Un **punt d'inflexió** és un punt on la funció passa de còncava a convexa (o viceversa).

Recordem que $f''(x) = e^x(x + 2)$.

- $f'' < 0$ en $(-\infty, -2) \Rightarrow f$ és còncava en $(-\infty, -2)$
- $f'' > 0$ en $(-2, \infty) \Rightarrow f$ és convexa en $(-2, \infty)$
- $x = -2$ és un punt d'inflexió

Tema 5: INTEGRACIÓ

5.1 Teorema fonamental del càlcul (regla de Barrow)

Teorema (fonamental del càlcul, regla de Barrow): Sigui f una funció contínua en $[a, b]$. Llavors,

$$A = \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

on $F'(x) = f(x)$

5.1 Teorema fonamental del càlcul

Calculem $\int_1^4 x^2 \, dx$. Sabem que $F(x) = \frac{x^3}{3}$ és una funció tal que $F' = f$. Per tant

$$\int_1^4 x^2 \, dx = \left(\frac{4^3}{3} \right) - \left(\frac{1^3}{3} \right) = 21.$$

Certament si haguéssim agafat $G(x) = \frac{x^3}{3} + 10$ que també compleix $G' = f$ tindríem

$$\int_1^4 x^2 \, dx = \left(\frac{4^3}{3} + 10 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 10 \right) = 21.$$

5.2 Càlcul de primitives

Definició: Anomenem *primitiva* de f a una funció F tal que $F'(x) = f(x)$ i escrivim

$$F(x) = \int f(x) \, dx$$

sense límits d'integració. D'això se'n diu *integral indefinida*, i, tal com mostra la igualtat, el seu resultat és una funció (tal que $F' = f$). Així diem que *integrar* no és res més que l'operació inversa de *derivar*.

Quan posem límits d'integració, de la integral

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

se'n diu *integral definida* i el seu resultat és un nombre (que quan $f \geq 0$ és l'àrea sota la corba $y = f(x)$).

5.2 Càlcul de primitives

Observació: La propietat fonamental que defineix la funció F és que $F'(x) = f(x)$. Per tant, està definida excepte constant. És a dir, si F és primitiva de f , llavors $F + c$, $c \in \mathbb{R}$ també.

Si $f(x) = e^x$, és clar que $F(x) = e^x$ és una primitiva, però $F(x) = e^x + 1$, també.

5.3 Càlcul de primitives. Integrals immediates

$$f(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = ax + c$$

$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \ln|x| + c$$

$$f(x) = e^x$$

$$F(x) = e^x + c$$

$$f(x) = \sin x$$

$$F(x) = -\cos x + c$$

$$f(x) = \cos x$$

$$F(x) = \sin x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$F(x) = \arctan x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$F(x) = \arcsin x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$F(x) = \sqrt{x} + c$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

$$\int cf(x) \, dx = c \int f(x) \, dx$$

5.4 Càlcul de primitives. Integració per parts

Per resoldre aquest tipus d'integrals, aplicarem la fórmula següent:

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

Si $\int f'(x)g(x) \, dx$ és coneguda, podrem obtenir $\int f(x)g'(x) \, dx$ usant la igualtat anterior.

5.4 Càlcul de primitives. Integració per parts

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

Exemple 1: $\int xe^x \, dx$

Hi apliquem la igualtat anterior amb $f(x) = x$ (per tant, $f'(x) = 1$) i $g'(x) = e^x$ (per tant, $g(x) = e^x$).

$$F(x) = \int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = (x - 1)e^x + c$$

5.4 Càlcul de primitives. Integració per parts

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

Exemple 2: $\int \ln x \, dx$

Hi apliquem la igualtat anterior amb $f(x) = \ln x$ (per tant, $f'(x) = 1/x$) i $g'(x) = 1$ (per tant, $g(x) = x$).

$$F(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x(\ln x - 1) + c$$

5.4 Càlcul de primitives. Integració per parts

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

Exemple 3: $\int e^x \sin x \, dx$

Hi apliquem la igualtat anterior amb $f(x) = \sin x$ (per tant, $f'(x) = \cos x$) i $g'(x) = e^x$ (per tant, $g(x) = e^x$).

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

Hem de resoldre la nova integral (altre cop parts $f(x) = \cos x$ i $g'(x) = e^x$)

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

5.4 Càlcul de primitives. Integració per parts

Substituint la segona igualtat en la primera, tenim:

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right)$$

Ara, aïllant $\int e^x \sin x \, dx$ de l'equació, resulta:

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

5.5 Integrals definides i càlcul d'àrees

Exemple: Calculem:

$$\int_0^2 \frac{x}{2} dx$$

Primer calculem una primitiva qualsevol (ja ho hem fet abans per a aquest cas). Noteu que agafarem $c = 0$.

$$F(x) = \frac{x^2}{4}$$

I ara farem:

$$\int_0^2 \frac{x}{2} dx = F(2) - F(0) = F(2) = \frac{4}{4} = 1$$

5.5 Integrals definides i càlcul d'àrees

Observació: Tal com hem anat veient, una de les aplicacions bàsiques del càlcul integral és el càlcul de l'àrea sota una corba. Sempre hem suposat que, en l'interval $[a, b]$, la funció f era positiva (o zero). Si no és així, la fórmula del càlcul de l'àrea delimita per una corba $y = f(x)$ en l'interval $[a, b]$ és

$$A_f = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

5.6 Integrals definides i càlcul d'àrees

Si tenim dues funcions $y = f(x)$ i $y = g(x)$ definides en $[a, b]$ i volem calcular l'àrea entre ambdues corbes, haurem de fer:

$$A_{fg} = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

- Alegre, P.; González, L.; Ortí, F.; Rodríguez, G.; Sáez, J.; Sancho, T. *Matemáticas empresariales*. Editorial AC, 1995.
- Hammond, P.; Sydsaeter, K. *Matemáticas para el análisis económico*. Prentice Hall, 1996.
- Alejandro, F.; Llerena, F.; Vilella, M. *Problemes de matemàtiques per a econòmiques i empresarials*. Ed. Media, 1995.