18

Eina-e

Matemàtiques II

Economia i empresa

Llúcia Mauri Masdeu

[publicacions] urv

Edita:
Publicacions URV

1a edició: Juny de 2013
ISBN: 978-84-695-7912-1
Dipòsit legal: T-744-2013

Publicacions de la Universitat Rovira i Virgili:
Av. Catalunya, 35 - 43002 Tarragona
Tel. 977 558 474
www.publicacionsurv.cat
publicacions@urv.cat

Matemàtiques II

Economia i empresa

Llúcia Mauri Masdeu

[publicacions]
urv

Tarragona, 2013

Índex de continguts

Pròleg

Aquest llibre, Matemàtiques II, no pretén ser una segona part de Matemàtiques I, sinó més aviat, pretén ser una primera aproximació a la branca de l'optimització en l'àmbit empresarial.

Val a dir, que si més no, sí té el mateix origen que Matemàtiques I. O sigui com un recull de pàgines, dins i fora de les aules on s'imparteix l'assignatura de Matemàtiques II a la Facultat d'Economia i Empresa de la Universitat Rovira i Virgili.

Aquest recull es convertiria amb les pàgines il·lustrades, que segueixen a continuació. I així per tant, proporcionar a l'alumnat material de suport en el transcurs de l'assignatura, per tal de facilitar l'adquisició de les competències necessàries, i així posteriorment, poder-les posar en pràctica.

Tot plegat, agraeixo el suport a la meva família, als meus alumnes, a totes aquelles persones que m'han envoltat i indeliberadament, han deixat el seu grà de sorra, a tot el personal de Publicacions URV, i a tot el personal de la Facultat d'Economia i Empresa de la URV, especialment per les seves aportacions i les seves opinions, en diverses parts del text a Norberto Márquez, a Francesc Llerena i a Cori Vilella.

Febrer 2013

TEORIA

Tema 1: Formes quadràtiques

1.1 Formes quadràtiques i matriu associada

Recordem què era una matriu simètrica:

Una matriu simètrica és aquella matriu quadrada, en què els elements que hi ha per sobre la diagonal principal són iguals als que hi ha per sota; és a dir, els elements $a_{ij}=a_{ji}$ per $i=1,\ldots,n$ i $j=1,\ldots,n$.

Exemples:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 8 & 4\\ 8 & -2 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -6\\ -6 & 7\end{pmatrix}$$

Les matrius A i B són simètriques.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 8 & 4\\ 8 & -2 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -6\\ -6 & 7\end{pmatrix}$$

Nota: A és simètrica $\Leftrightarrow$ $A=A^t$

Què és una forma quadràtica?

Sigui A una matriu simètrica d'ordre n. Definim la forma quadràtica associada a la matriu A i la denotarem per q a l'aplicació següent:

$$q: R^n \longrightarrow R$$

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) \longmapsto (x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ .\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}$$

Exemples:

1) Considerem la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; llavors:

$$q_1 : R^2 \longrightarrow R$$

$$(x,y) \longmapsto (x,y)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x^2+y^2$$

Per tant, l'expressió polinòmica de la forma quadràtica serà $q_1(x,y)=x^2+y^2$.

2) Considerem la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$; llavors:

$$q_2 : R^3 \longrightarrow R$$

$$(x,y,z) \longmapsto (x,y,z)\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y+2z & -x-2y+z & 2x+y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} =$$

$$= x^2-2y^2-2xy+4xz+2yz$$

Per tant, l'expressió polinòmica de la forma quadràtica serà:

$$q_2(x,y,z) = x^2-2y^2-2xy+4xz+2yz$$

Propietats

Sigui q la forma quadràtica associada a la matriu A, $\alpha \in R$ i $\vec{v}\in R^n$. Llavors, es compleix:

1) $q(0,\ldots,0)=0$
2) $q(\alpha\vec{v})=\alpha^2 q(\vec{v})$

Exemple:

1) Sigui $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=(1,-2)$ i $\alpha=3$. Comprovem la segona propietat:

$$q : R^2 \rightarrow R$$

$$(x,y) \longmapsto (x,y)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x^2+y^2$$

Per tant, la forma quadràtica serà $q(x,y)=x^2+y^2$. Llavors:

$$\left.\begin{array}{l} q(\alpha\vec{v}) = q(3\cdot(1,-2)) = q(3,-6) = 3^2+(-6)^2 = 45 \\ \alpha^2 q(\vec{v}) = 3^2\cdot q(\vec{v}) = 9\cdot q((1,-2)) = 9\cdot\left(1^2+(-2)^2\right) = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow q(\alpha\vec{v}) = \alpha^2 q(\vec{v})$$

Fins aquí sabem trobar la forma quadràtica (o expressió polinòmica) associada a una matriu A. Però podem trobar a partir de la matriu associada A la forma quadràtica q (o expressió polinòmica)? Vegem-ho amb uns exemples:

Nota: Recordeu que la matriu A que hem d'obtenir ha de ser simètrica.

Exemples:

1) Considerem la forma quadràtica $q_1(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$ i busquem la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, que és simètrica.

Sabem la relació següent:

$$q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto (x,y)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & bx+cy \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Per tant:

$$ax^2 + 2byx + cy^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

Igualem component a component i obtenim que:

$$\begin{cases} a = 1 & (Igualant \quad les \quad x^2) \\ 2b = -2 & (Igualant \quad les \quad xy) \\ c = 1 & (Igualant \quad les \quad y^2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Considerem la forma quadràtica $q_2(x,y,z) = -3x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 4xy + 6xz + 2yz$ i busquem la matriu associada

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, que és simètrica.

Sabem la relació següent:

$$q_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x,y,z)\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz & bx+dy+ez & cx+ey+fz \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$
$$= ax^2 + bxy + czx + bxy + dy^2 + ezy + cxz + fz^2 =$$
$$= ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2bxy + 2czx + 2ezy$$

Per tant:

$$ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2byx + 2czx + 2ezy = -3x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 4xy + 6xz + 2yz$$

Igualem component a component i obtenim que:

$$\begin{cases} a=-3 & (Igualant \quad les \quad x^2) \\ d=5 & (Igualant \quad les \quad y^2) \\ f=4 & (Igualant \quad les \quad z^2) \\ 2b=-4 & (Igualant \quad les \quad xy) \\ 2c=6 & (Igualant \quad les \quad xz) \\ 2e=2 & (Igualant \quad les \quad yz) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ d=5 \\ f=4 \\ b=-2 \\ c=3 \\ e=1 \end{cases} \rightarrow \quad A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

De manera anàloga, obtenim el cas d'una forma quadràtica de dimensió 4:

$$q:\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y,z,t) \mapsto (x,y,z,t)\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = ax^2+ey^2+hz^2+jt^2+2bxy+2cxz+2fzy+2dtx+2gty+2itz$$

Polinomi característic:

Sigui A una matriu simètrica d'ordre n. Anomenarem el polinomi característic de la matriu A i el denotarem per $p_A(\lambda)$, el polinomi de grau n resultant del càlcul del determinant $|A-\lambda I|$.

És a dir, sigui $A=\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matriu d'ordre n, llavors el polinomi característic serà:

$$p_A(\lambda)=|A-\lambda I_n|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & . & . & . & a_{1n} \\ . & a_{22}-\lambda & & & . \\ . & & \ddots & & . \\ . & & & a_{n-1\,n-1}-\lambda & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

Exemple:

Sigui $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Busquem el polinomi característic:

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 2\\ -1 & -\lambda & 1\\ 2 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2-2-2+4\lambda-(1-\lambda)-(1-\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6$$

Per tant, el polinomi característic de la matriu A és $p_A(\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6$

Valor propi:

Sigui A una matriu d'ordre n i $p_A(\lambda)$ el polinomi característic associat a aquesta matriu. Anomenarem valors propis de la matriu A i els denotarem per λ_j, per $j=1,\ldots,n$, els valors reals, tal que

$p_A(\lambda)=|A-\lambda I_n|=0$; és a dir, quan $p_A(\lambda)=0$; per tant, les arrels del polinomi característic.

Exemple:

1) Prenem la matriu A de l'exemple anterior:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Busquem el polinomi característic:

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 2\\ -1 & -\lambda & 1\\ 2 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2-2-2+4\lambda-(1-\lambda)-(1-\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6$$

Per tant, el polinomi característic de la matriu A és $p_A(\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6$

Ara busquem les arrels d'aquest polinomi i obtindrem els valors propis de la matriu A:

$-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -1 & 2 & 5 & -6\\
1 & & -1 & 1 & 6\\
\hline
 & -1 & 1 & 6 & \boxed{0}\\
-2 & & 2 & -6 & \\
\hline
 & -1 & 3 & \boxed{0} & \\
3 & & -3 & & \\
\hline
 & -1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Per tant, els valors propis seran: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$ i $\lambda_3=3$.

Menor principal:

Sigui A una matriu d'ordre n. Anomenarem menor principal d'ordre j de la matriu A i el denotarem per $|A_j|$, el determinant de la submatriu que s'obté de les primeres j files i les j primeres columnes de la matriu A.

Exemple:

1) Busquem tots els menors principals de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A_1| = 1 \quad , \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad , \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

1.2 Classificació de les formes quadràtiques

Donada una forma quadràtica q: $R^n \to R$ i $\vec{v} = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n$ un vector. Diem que:

$q(\vec{v})$ és definida positiva si $q(\vec{v}) > 0, \quad \forall \vec{v} \in R^n, \ \vec{v} \neq \vec{0}$.

$q(\vec{v})$ és definida negativa si $q(\vec{v}) < 0, \quad \forall \vec{v} \in R^n, \ \vec{v} \neq \vec{0}$.

$q(\vec{v})$ és semidefinida positiva si $q(\vec{v}) \geq 0, \quad \forall \vec{v} \in R^n$ i $\exists \vec{u} \neq \vec{0}$, tal que $q(\vec{u}) = 0$.

$q(\vec{v})$ és semidefinida negativa si $q(\vec{v}) \leq 0, \quad \forall \vec{v} \in R^n$ i $\exists \vec{u} \neq \vec{0}$, tal que $q(\vec{u}) = 0$.

$q(\vec{v})$ és indefinida si $\exists \vec{u}, \vec{w} \in R^n$, tal que $q(\vec{u}) > 0$ i $q(\vec{w}) < 0$.

Exemples:

1) $q_1(x,y) = x^2 + y^2$ és definida positiva, ja que prenent qualsevol vector si fem la suma de les seves components al quadrat sempre serà positiu, excepte el vector nul.

2) $q_2(x,y) = (x+y)^2$ és semidefinida positiva, ja que $q_2(x,y) \geq 0$ per a qualsevol vector i existeix, per exemple, el vector $\vec{u} = (3,-3)$ no nul, tal que $q(3,-3) = 0$.

3) $q_3(x,y) = x^2 - y^2$ és indefinida, ja que si prenem, per exemple, els vectors $\vec{u}_1 = (3,2)$ i $\vec{u}_2 = (0,3)$ tenim que $q(3,2) = 5 > 0$ i $q(0,3) = -9 < 0$.

Però, normalment, no serà tan senzill classificar-la. Per això necessitarem fer ús d'alguns mètodes per poder-ho dur a terme.

Veurem dos mètodes:

— Mètode utilitzant els valors propis de A.

— Mètode utilitzant els menors principals.

Mètode utilitzant els valors propis de A

Aquest mètode classifica una forma quadràtica en funció del signe dels valors propis de la matriu associada.

Llavors, sigui $q: R^n \to R$ una forma quadràtica i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ els valors propis de la matriu associada.

Direm que:

q és definida positiva $\Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i$ (Tots els valors propis són positius)

q és definida negativa $\Leftrightarrow \lambda_i < 0 \quad \forall i$ (Tots els valors propis són negatius)

q és semidefinida positiva $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \quad \forall i$ (Tots els valors propis són positius o zero)

q és semidefinida negativa $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0 \quad \forall i$ (Tots els valors propis són negatius o zero)

q és indefinida $\Leftrightarrow \exists\, \lambda_i > 0$ i $\lambda_j < 0 \quad i, j \in N$ (Hi ha valors propis estrictament positius i valors propis estrictament negatius)

Mètode utilitzant els menors principals

Aquest mètode classifica una forma quadràtica en funció del signe dels menors principals de la matriu associada A d'odre n.

Diem que:

1) Si $|A| \neq 0$ (La forma quadràtica q no és semidefinida).

- Si $|A_1| > 0, \ldots, |A_n| > 0 \Rightarrow q$ és definida positiva.
- Si $\begin{cases} |A_j| > 0 & si\ j\ és\ parell \\ |A_j| < 0 & si\ j\ és\ senar \end{cases} \Rightarrow q$ és definida negativa.
- q és indefinida per a la resta de casos.

2) Si $|A| = 0$ (La forma quadràtica q no és definida).

- Si $|A_1| > 0, \ldots, |A_j| > 0$ essent $j < n \Rightarrow q$ és semidefinida positiva.
- Si $\begin{cases} |A_j| > 0 & si\ j\ és\ parell \\ |A_j| < 0 & si\ j\ és\ senar \end{cases}$ essent $j < n \Rightarrow q$ és semidefinida negativa.
- q és indefinida per a la resta de casos, tal que $|A_j| \neq 0$ essent $j < n$.

En la resta de casos, el mètode no decideix i utilitzarem el criteri dels valors propis.

Exemples:

1) $q(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$

Busquem la matriu associada a aquesta forma quadràtica:

$$ax^2 + 2byx + cy^2 = x^2 - 2xy + 4y^2$$

Per tant:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2b = -2 \\ c = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases}$$

Així ens queda la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Apliquem el mètode utilitzant els valors propis de A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 3$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4'302 > 0 \qquad \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \approx 0'697 > 0$$

Com que tots els valors propis són positius, tindrem que la forma quadràtica és definida positiva.

Apliquem el mètode utilitzant els menors principals de A:

$$|A_1| = 1 \quad , \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

Com que $|A| = |A_2| = 3 \neq 0$ i els menors principals de la matriu associada són positius, tindrem que la forma quadràtica és definida positiva.

2) $q(x, y, z) = -3x^2 + 2xy - y^2 + z^2$

Busquem la matriu associada a aquesta forma quadràtica:

$$ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2byx + 2czx + 2ezy = -3x^2 + 2xy - y^2 + z^2$$

Per tant:

$$\begin{cases} a = -3 \\ 2b = 2 \\ c = 0 \\ d = -1 \\ 2e = 0 \\ f = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = -1 \\ e = 0 \\ f = 1 \end{cases}$$

Així ens queda la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Apliquem el mètode utilitzant els valors propis de A:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -2 - \sqrt{2} \approx -3{,}4142 ,$
$\lambda_3 = -2 + \sqrt{2} \approx -0{,}5857$

En el cas que hi hagi valors propis positius i negatius, tindrem que la forma quadràtica és indefinida.

Apliquem el mètode utilitzant els menors principals de A:

$$|A_1| = -3 \quad , \quad |A_2| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad , \quad |A_3| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Com que $|A| = |A_3| = 2 \neq 0$ i els menors principals de la matriu associada són positius i negatius, però el $|A_3| > 0$ i té subíndex senar; per tant, la forma quadràtica és indefinida.

Tema 2: Funcions de diverses variables

2.1 Continuïtat de funcions

Conceptes bàsics

- Funció escalar o real de *n* variables reals:
  És una aplicació tal que:

$$\begin{aligned} f : A \subseteq R^n &\to R \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

- Funció vectorial de *n* variables reals:
  És una aplicació tal que:

$$\begin{aligned} f : A \subseteq R^n &\to R^m \\ \vec{x} &\mapsto (f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})) \end{aligned}$$

on $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ és un vector de R^n i $f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})$ són un conjunt de funcions escalars que anomenarem *funcions components*.

Exemples:
1)

$$\begin{aligned} f : A \subseteq R^2 &\to R \\ (x, y) &\mapsto 3x^2 + y \end{aligned}$$

Aquesta funció és escalar, ja que la imatge de qualsevol vector de R^2 és un escalar. Per exemple, si busquem la imatge dels vectors $(1, 2)$ i $(4, -3)$:

$$f(1,2) = 3 \cdot 1^2 + 2 = 5 \qquad f(4,-3) = 3 \cdot 4^2 - 3 = 45$$

2)

$$f : A \subseteq R^2 \to R^3$$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{y} \, , \, x - 3x^2 y \, , \, \ln(x + y) \right)$$

Aquesta funció és vectorial, ja que la imatge de qualsevol vector de R^2 és un vector. Per exemple, si busquem la imatge dels vectors (1, 2) i (4, –3):

$$f(1,2) = \left(\frac{1}{2} , 1 - 3 \cdot 1^2 \cdot 2 \, , \, \ln(1+2) \right) = \left(\frac{1}{2} , -5 \, , \, \ln(3) \right)$$

$$f(4,-3) = \left(-\frac{4}{3} , 4 - 3 \cdot 4^2 \cdot (-3) \, , \, \ln(4-3) \right) = \left(-\frac{4}{3} , 148 \, , \, 0 \right)$$

A més, aquesta funció vectorial conté tres funcions components:

$f_1 = \frac{x}{y}$ $\qquad$ $f_2 = x - 3x^2 y$ $\qquad$ $f_3 = \ln(x + y)$

Domini:

Definim el domini d'una funció de diverses variables $f : A \subseteq R^n \to R^m$, com la intersecció dels dominis de cadascuna de les funcions components.

$$Dom\ f = \left\{ \vec{x} \in R^n \mid \exists f(\vec{x}) \right\} \subseteq R^m \qquad on \qquad Dom\ f = \bigcap_i Dom\ f_i$$

Exemple:

1) $f(x, y) = \left(\frac{x}{y} \, , \, x - 3x^2 y \, , \, \ln(x + y) \right)$

Per tant, tenim que:

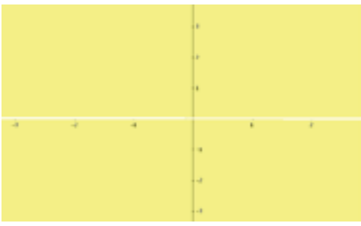
$f_1 = \frac{x}{y}$ $\qquad$ $f_2 = x - 3x^2 y$ $\qquad$ $f_3 = \ln(x + y)$

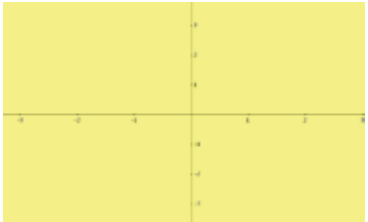
$$\left. \begin{array}{l} Dom\ f_1 = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid y \neq 0\} \\ Dom\ f_2 = \mathrm{R}^2 \\ Dom\ f_3 = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid x + y > 0\} \end{array} \right\} \qquad Dom\ f = Dom\ f_1 \cap Dom\ f_2 \cap Dom\ f_3$$

Llavors, $Dom\ f = \{(x, y) \in R^2 \mid x + y > 0 \, , \, y \neq 0\}$

Gràficament:

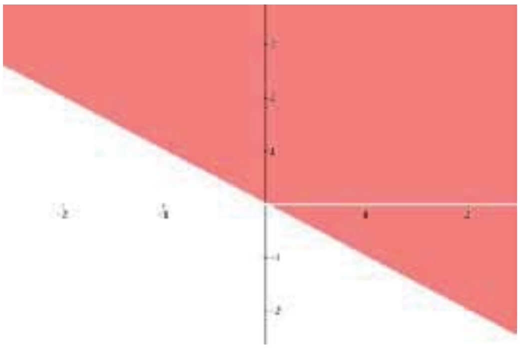
$Dom\ f_1$ $\quad$ $Dom\ f_2$ $\quad$ $Dom\ f_3$


Imatge 1


Imatge 2


Imatge 3

$$Dom\ f = Dom\ f_1 \cap Dom\ f_2 \cap Dom\ f_3$$


Imatge 4

Imatge:
Definim la imatge de $f : A \subseteq R^n \to R^m$ com:

$$f(A) = \operatorname{Im} f = \left\{ \vec{y} \in R^m \mid \exists \vec{x} \in R^n \ , f(\vec{x}) = \vec{y} \right\}$$

Exemple:

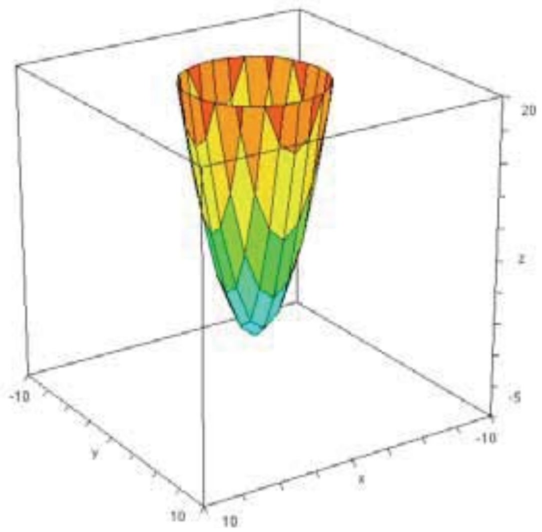
1) $f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{Im} f = [0,+\infty)$

Gràfica:
Definim la gràfica de $f : A \subseteq R^n \to R^m$ com el conjunt de punts $(x_1,...,x_n, f(x_1,...,x_n))$

$$G(f) = \{(\vec{x},\vec{y}) \in R^{n+m} | \vec{y} = f(\vec{x})\}$$

Exemple:

$$1)\ f(x,y) = x^2 + y^2$$



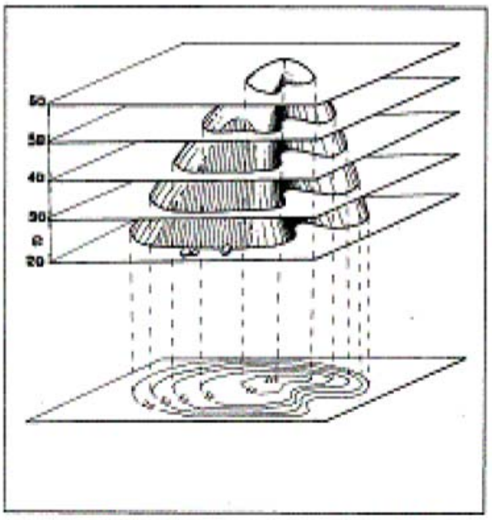
Imatge 5

Corbes de nivell:

Donada una funció escalar $f: A \subseteq R^n \to R$ i una constant $k \in$R. Anomenem corba de nivell k de la funció f i la denotarem per C_k, al conjunt:

$$C_k = \{\vec{x} \in A \subseteq R^n \mid f(\vec{x}) = k\}$$

Imatge 6



Imatge 7

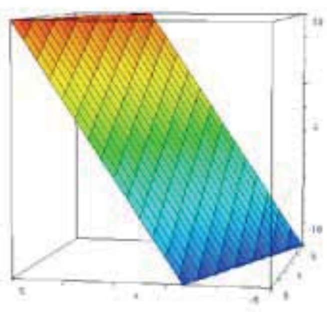
Nota: En l'àmbit econòmic alguns exemples de corbes de nivell són les corbes d'indiferència, les isoquantes...

Recordem:

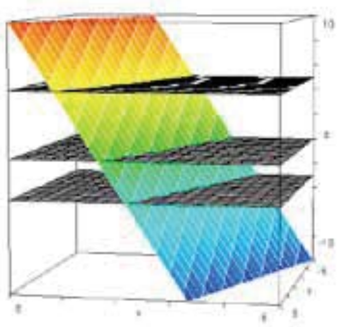
- Recta $y = mx + n$, on m és el pendent i n l'ordenada a l'origen.
- Circumferència: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, on (a, b) és el centre i r el radi.

Exemples:

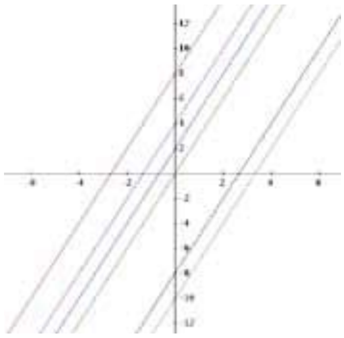
1) $f(x, y) = 3x - y$



Imatge 8



Imatge 9



Imatge 10

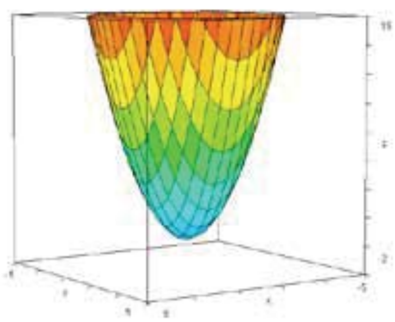
Igualem la funció a k i aïllem la y:

$$3x - y = k \quad \rightarrow \quad y = 3x - k$$

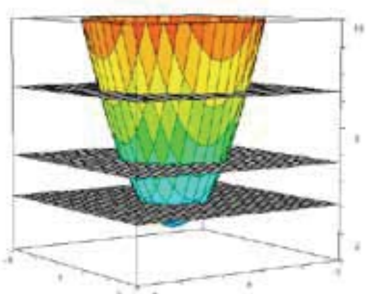
Donem valors a la k i observem que obtenim rectes:

$$\begin{cases} k = 0 & y = 3x \\ k = 1 & y = 3x - 1 \\ k = 2 & y = 3x - 2 \\ k = -1 & y = 3x + 1 \\ k = -2 & y = 3x + 2 \end{cases}$$

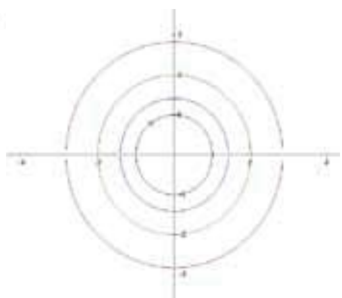
2) $f(x, y) = x^2 + y^2$



Imatge 11



Imatge 12



Imatge 13

Igualem la funció a k i observem que obtenim una circumferència de radi $\sqrt{k}$:

$$x^2 + y^2 = k \quad \text{on} \quad k \geq 0$$

Donem valors a la k i observem que obtenim circumferències:

$$\begin{cases} k = 0 & x^2 + y^2 = 0 \\ k = 1 & x^2 + y^2 = 1 \\ k = 2 & x^2 + y^2 = 2 \\ k = -1 & x^2 + y^2 = -1 \text{ NO!!!} \end{cases}$$

Límits de funcions

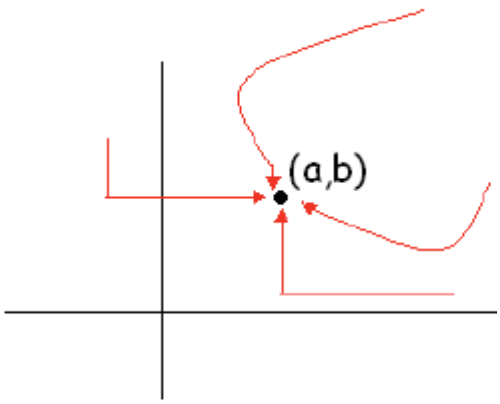
El concepte de *límit de funcions de diverses variables* és anàleg al de funcions d'una variable. És a dir, volem saber cap a on tendeix una funció quan ens acostem a un cert punt.

Per calcular límits de diverses variables procedirem de la mateixa manera que en el cas de funcions d'una variable real. Però, si obtenim algun tipus d'indeterminació haurem de plantejar-nos l'existència o no existència d'aquest límit.

Exemples:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2 + y^3}{x + y} = 3$ 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-3)} \dfrac{x^2 + y^3}{x + y} = 9$ 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^3}{x + y} = \dfrac{0}{0}$?

Límits direccionals



Imatge 14

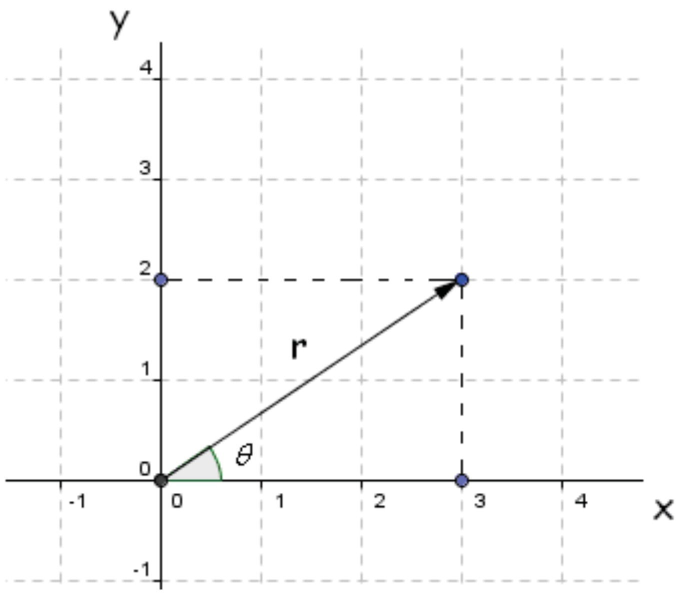
A les funcions reals d'una variable real sols podíem aproximar-nos a un punt per la dreta o per l'esquerra, però, quan estem en un espai de dimensió més gran amb funcions de diverses variables, hi ha camins infinits per apropar-nos a un punt en concret.

Llavors, si les formes d'aproximar-nos a un punt són infinites, per tal que existeixi el límit han d'existir tots els límits sobre qualsevol trajectòria i, a més, aquests han de coincidir.

Però no és possible calcular-los tots! Llavors, donarem una eina per assegurar la no-existència de límit, o en cas que existeixi ens donarà una idea de quin seria el seu valor.

Podem aproximar-nos de moltes maneres a un punt, ja sigui mitjançant rectes, paràboles,... Però ho farem amb coordenades polars.

Coordenades polars:



Imatge 15

Les coordenades polars defineixen una posició a partir d'un angle θ i d'un mòdul (o norma) *r*. Vegem quina relació hi ha entre coordenades cartesianes i coordenades polars:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos\theta \\ y = y_0 + r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

on $r \geq 0$ i $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Nota: Recordem $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Exemples:

1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \underset{(1)}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r\cdot\cos\theta\cdot r\cdot\sin\theta}{(r\cdot\cos\theta)^2+(r\cdot\sin\theta)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \underset{(2)}{=}$$
$$= \cos\theta\cdot\sin\theta$$

(1) Canvi amb coordenades polars:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta \end{cases}$$

(2) Utilitzem la propietat:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Aquest límit no existeix, ja que depèn del paràmetre θ

2)
$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{(x-1)^2(y+2)}{(x-1)^2+(y+2)^2} = \frac{0}{0} \underset{(1)}{=} \lim_{r\to 0} \frac{(1+r\cdot\cos\theta-1)^2(-2+r\cdot\sin\theta+2)}{(1+r\cdot\cos\theta-1)^2+(-2+r\cdot\sin\theta+2)^2} =$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cdot\cos^2\theta\cdot r\cdot\sin\theta}{r^2\cdot\cos^2\theta+r^2\cdot\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \underset{(2)}{=} \lim_{r\to 0} r\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta = 0$$

(1) Canvi amb coordenades polars:

$$\begin{cases} x = 1 + r\cdot\cos\theta \\ y = -2 + r\cdot\sin\theta \end{cases}$$

(2) Utilitzem la propietat:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Continuïtat de funcions

Direm que una funció $f : A \subseteq R^n \to R^m$ és contínua si ho és en cada funció component; és a dir, si les funcions f_i, on $i=1,\dots,m$ són contínues.

Direm que una funció $f_i : A \subset R^n \to R$ és contínua en un punt $x_0 \in A$, si el límit quan x tendeix a x_0 i el valor de la funció en el punt x_0 coincideixen, és a dir:

$$\lim_{x\to x_0} f_i = f_i(x_0)$$

Per tant, una funció f_i serà contínua si ho és en tots els punts $x_0 \in R^n$.

Exemple:

1) Considerem la funció:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funció $f(x, y)$ està definida a trossos, per a $(x, y) \neq (0, 0)$ correspon la funció $\frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, que és contínua en tots els punts menys els que anul·len el denominador, però el punt (0,0) no pertany al domini de definició, llavors és contínua. Per a $(x, y)=(0, 0)$ és la funció constant 0 que sempre és contínua. Ara sols ens cal estudiar què passa al punt de tall, vegem si el límit de la funció quan tendeix a (0,0) coincideix amb el valor $f(0, 0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \underset{(1)}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cdot\cos^2\theta\cdot r\cdot\sin\theta}{r^2\cdot\cos^2\theta + r^2\cdot\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{r^2\cdot(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \underset{(2)}{=} \lim_{r\to 0} r\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta = 0$$

(1) Canvi amb coordenades polars:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta \end{cases}$$

(2) Utilitzem la propietat:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$f(0,0) = 0$

Per tant, la funció $f(x,y)$ és contínua en tots els seus punts de R^2.

2.2 Càlcul de derivades parcials

Sigui $f : A \subseteq R^n \to R$ una funció escalar.

Derivada parcial:

Es denomina derivada parcial respecte la i-èsima component, o respecte la variable x_i, de la funció f amb $i = 1,...,n$, a la derivada de la funció f considerant com a variable la x_i i la resta de variables com a constants. Ho denotarem per:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$$

Altres notacions: $f_i'(\vec{x})$, $D_i f(\vec{x})$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\vec{x})$, $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x})$

Exemples:
Busquem totes les derivades parcials de les funcions següents:

1) $f(x,y) = x^2 + y - 3$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$ $\qquad$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$

2) $f(x,y) = x^2 y - 2x$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy - 2$ $\qquad$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2$

3) $f(x,y,z) = x^2 y^3 - 2\ln(z) + xz + 4$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2xy^3 + z \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 3x^2y^2 \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = -\frac{2}{z} + x$$

Gradient:

Sigui $f : A \subseteq R^n \to R$ una funció de diverses variables i $\vec{x} = (x_1,\ldots x_n) \in A$, definim el vector gradient de *f*, i el denotarem per $\nabla f(\vec{x})$ com:

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\right)$$

Exemple:

1) $f(x,y) = x^2y - 2x$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \left(2xy - 2\ ,\ x^2\right)$$

Matriu jacobiana:

Sigui $f : A \subseteq R^n \to R^m$ una funció vectorial de diverses variables i $\vec{x} = (x_1,\ldots x_n) \in A$, definim la matriu jacobiana de *f* com la matriu dels vectors gradients de les funcions components i ho denotarem per $Jf(\vec{x})$ com:

$$Jf(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{x}) \\ \nabla f_2(\vec{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} & & \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Exemple:

1) $f(x,y) = \left(x^3 + \sin(y)\ ,\ 2y + xy\ ,\ \ln(2x+y) + 3\right)$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x,y) \\ \nabla f_2(x,y) \\ \nabla f_3(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 & \cos(y) \\ y & 2+x \\ \frac{2}{2x+y} & \frac{1}{2x+y} \end{pmatrix}$$

Derivades parcials successives:

Igualment com les funcions d'una variable on hi havia la derivada de la derivada, i així successivament, el mateix passa amb les funcions de diverses variables.

Per tant, podem definir la derivada parcial segona respecte la j-èsima component, o respecte la variable x_j, de la funció $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$ amb $j = 1,\ldots,n$, com la derivada de la derivada parcial $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$ considerant com a variable x_j i la resta de variables com a constants. Ho denotarem per:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}$$

Altres notacions: $f''_{ij}(\vec{x})$, $D^2_{ij} f(\vec{x})$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(\vec{x})$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\vec{x})$

Nota: Denotarem la propera expressió de la manera següent:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2}$$

Matriu hessiana:

Sigui $f : A \subseteq \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ una funció de diverses variables i $\vec{x} = (x_1,\ldots x_n) \in A$, definim la matriu hessiana de *f*, i ho denotarem per $Hf(\vec{x})$ com:

$$Hf(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2^2} & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Exemple:

1) $f(x,y) = x^2 y - 2x$

Considerem totes les derivades parcials de primer ordre:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy - 2 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2$$

Busquem les derivades parcials segones:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2y \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

Per tant, la matriu hessiana serà la següent:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Elasticitat parcial

L'elasticitat és un concepte econòmic introduït per l'economista anglès Alfred Marshall, que ens serveix per quantificar la variació que experimenta una variable (dependent) en variar a una altra (independent). Per exemple, la variació de la quantitat de productes venuts en funció de la variació del preu.

Per tant, podem entendre l'*elasticitat* com una variació percentual o relativa. Quan teníem una funció d'una variable estava clar quina era la variable independent, però, amb les funcions de diverses variables què?

D'aquí la necessitat de definir l'elasticitat parcial d'una funció de diverses variables, com la variació relativa provocada per un canvi relatiu d'una variable en tant que la resta de variables resten inalterades. Per tant:

$$E_{x_i} f(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{\vec{x}_i}{f(\vec{x})}$$

Exemple:

1) Calculem l'elasticitat parcial respecte la variable *y* de la funció següent, en el punt (2,1):

$$f(x,y) = x - 3x^2 y + 4y$$

Necessitarem calcular:

$$f(2,1) = 2 - 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = -6 \quad i \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -3x^2 + 4 \;\rightarrow\; \frac{\partial f(2,1)}{\partial y} = -3 \cdot 2^2 + 4 = -8$$

$$E_y f(2,1) = \frac{\partial f(2,1)}{\partial y} \cdot \frac{1}{f(2,1)} = -8 \cdot \frac{1}{-6} = 1'\widehat{3}$$

Tema 3: Optimització sense restriccions

3.1. Descripció del problema

En el món de l'economia i de la gestió empresarial és molt important minimitzar costos, recursos... i maximitzar beneficis, producció... , és a dir, optimitzar. Tots aquests conceptes són variables que influeixen considerablement en els problemes d'optimització de qualsevol empresa o procés de producció, d'aquí la necessitat d'haver d'optimitzar funcions econòmiques de diverses variables.

Estudiarem les condicions necessàries i suficients per a la determinació d'òptims de funcions de diverses variables. El model de problemes a resoldre serà del tipus:

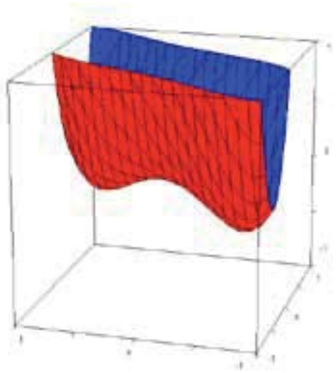
$$\text{Optimitzar: } f(\vec{x})$$

On $f(\vec{x})$ serà una funció escalar de diverses variables.

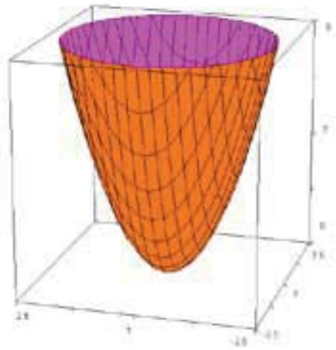
Extrems òptims d'una funció escalar

Sigui $f: A \subset R^n \rightarrow R$ una funció escalar i un punt $x_0 \in A$, direm que:

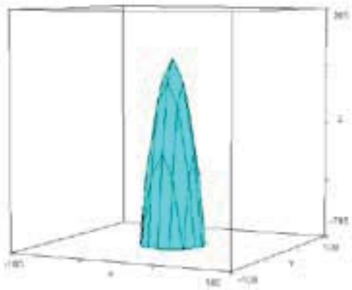
- x_0 és un mínim local de $f \Leftrightarrow$ Existeix un entorn de x_0 on $f(x_0) \leq f(x)$ per tot x pertanyent a un entorn de A.
- x_0 és un màxim local de $f \Leftrightarrow$ Existeix un entorn de x_0 on $f(x_0) \geq f(x)$ per tot x pertanyent a un entorn de A.
- x_0 és un mínim global de $f \Leftrightarrow f(x_0) \leq f(x)$ per tot x pertanyent a un entorn de A.
- x_0 és un màxim global de $f \Leftrightarrow f(x_0) \geq f(x)$ per tot x pertanyent a un entorn de A.



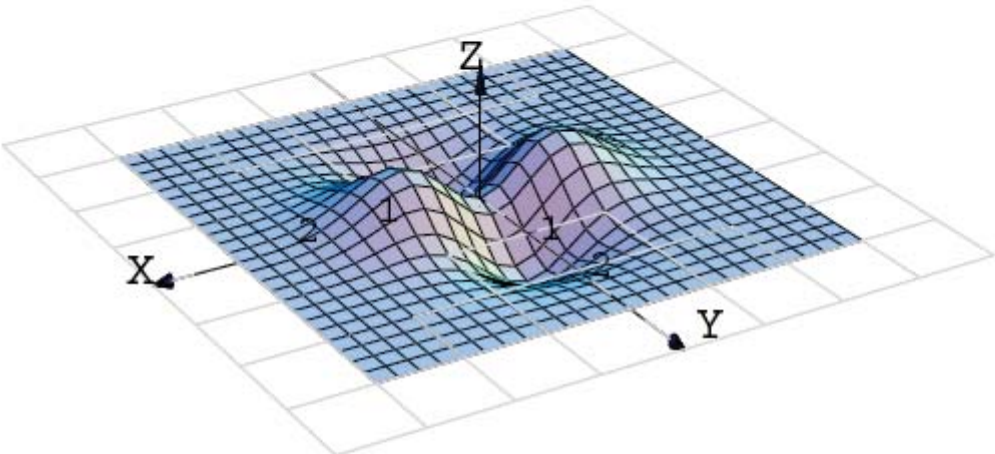
Imatge 16



Imatge 17



Imatge 18



Imatge 19

Teorema de Weierstrass (o bé, Teorema dels valors extrems)

Si $f: A \subset R^n \rightarrow R$ és una funció contínua i A un conjunt tancat i acotat; llavors, hi ha dos punts x_1 i x_2, tal que x_1 és un màxim global de f i x_2 és un mínim global de f.

Teorema d'optimitat local-global

Sigui $f: A \subset R^n \rightarrow R$, $x_0 \in A$ i A és un conjunt convex es verifica:

a) Si f és convexa en A i x_0 és un mínim local de $f \Rightarrow x_0$ és un mínim global.
b) Si f és còncava en A i x_0 és un màxim local de $f \Rightarrow x_0$ és un màxim global.

3.2 Condicions d'optimitat

Condició necessària de primer ordre

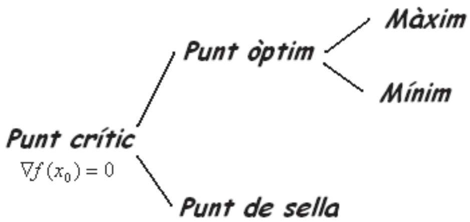
f té un punt òptim local en $x_0 \in A \Rightarrow \nabla f(x_0)=0$ (és a dir $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}=0 \quad \forall i=1,\ldots,n$).

Cal tenir en compte però, i no confondre'ns entre punt òptim i punt crític:

f té un punt crític en $x_0 \in A \Leftrightarrow \nabla f(x_0)=0$ (és a dir $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}=0 \quad \forall i=1,\ldots,n$).

Aquests punts crítics o estacionaris no sempre són òptims de la funció (màxims o mínims), quan no ho són, s'anomenen *punts de sella*.

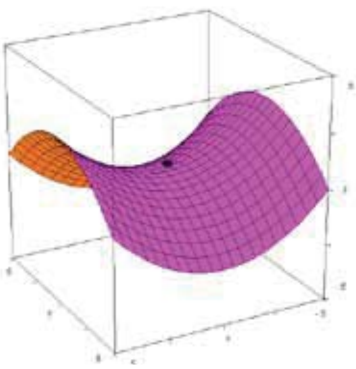
És a dir, quan tenim $\nabla f(x_0)=0$, aquest x_0 pot ser màxim, mínim o punt de sella.

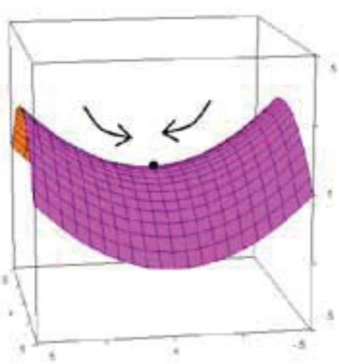


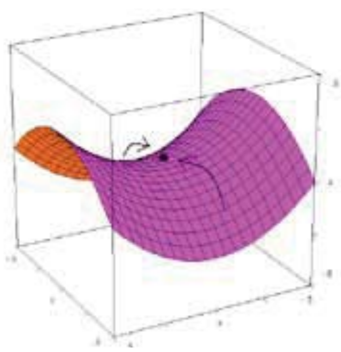
Punt de sella:

x_0 és un punt de sella $\Leftrightarrow$ En un entorn de x_0 hi ha punts que verifiquen $f(x_0) \leq f(x)$ i punts que verifiquen $f(x_0) \geq f(x)$

És a dir, és un punt on, depenent com ho mirem, observem que la funció creix o decreix al seu voltant:


Imatge 20


Imatge 21


Imatge 22

Per tant, per saber si es tracta d'un màxim, mínim o punt de sella necessitarem més condicions.

Condició necessària de segon ordre

Sigui $f: A \subset R^n \to R$, A obert, $x_0 \in A$ i, a més a més, f té les derivades parcials de primer i segon ordre contínues en A. Llavors:

- si x_0 és un mínim local de $f \Rightarrow Hf(x_0)$ és semidefinida positiva.
- si x_0 és un màxim local de $f \Rightarrow Hf(x_0)$ és semidefinida negativa.

Corol·lari:

Sigui $f: A \subset R^n \to R$, A obert, $x_0 \in A$ i, a més a més, f té les derivades parcials de primer i segon ordre contínues en A. Llavors:

- si $\nabla f(x_0)=0$ i $Hf(x_0)$ és indefinida $\Rightarrow x_0$ és un punt de sella.

Condició suficient de segon ordre

Sigui $f: A \subset R^n \to R$, A obert, $x_0 \in A$ i, a més a més, f té les derivades parcials de primer i segon ordre contínues en A. Llavors:

- si $\nabla f(x_0)=0$ i $Hf(x_0)$ és definida positiva $\Rightarrow x_0$ és un mínim local (estricte) de f.
- si $\nabla f(x_0)=0$ i $Hf(x_0)$ és definida negativa $\Rightarrow x_0$ és un màxim local (estricte) de f.

Conclusions:

- si $\nabla f(x_0)=0$ i $Hf(x_0)$ és definida positiva $\Rightarrow x_0$ és un mínim local (estricte) de f.
- si $\nabla f(x_0)=0$ i $Hf(x_0)$ és definida negativa $\Rightarrow x_0$ és un màxim local (estricte) de f.
- si $\nabla f(x_0)=0$ i $Hf(x_0)$ és indefinida $\Rightarrow x_0$ és un punt de sella de f.
- si $\nabla f(x_0)=0$ i $Hf(x_0)$ és semidefinida (positiva o negativa) $\Rightarrow$ (Cal d'estudiar-ho).

Recordem que podíem classificar les matrius simètriques utilitzant o bé els valors propis o bé els menors principals d'aquesta (vegeu Tema 1: Formes quadràtiques i matriu associada).

Com em vist en el cas en què $Hf(x_0)$ és semidefinida, cal estudiar què passa. Així doncs, tenim que:

- si $\nabla f(x_0)=0$ i $Hf(x_0)$ és semidefinida positiva $\to x_0$ és un mínim local o un punt de sella.
- si $\nabla f(x_0)=0$ i $Hf(x_0)$ és semidefinida negativa $\to x_0$ és un màxim local o un punt de sella.

Vegem com funciona amb un exemple (exemple 3):

Exemples:

1) $f(x, y)=x^2+y^2+y-1$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero: (Condició necessària de primer ordre)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad , \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y+1$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y+1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Punt crític: $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

Busquem la matriu hessiana: (Condició necessària de segon ordre)

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad Hf\left(0,-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|Hf\left(0,-\frac{1}{2}\right)_1\right| = 2 > 0 \qquad , \qquad \left|Hf\left(0,-\frac{1}{2}\right)_2\right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Per tant, $Hf\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ és definida positiva. Llavors, el punt $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ és un mínim local

2) $f(x,y)=x^2-y^2$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero: (Condició necessària de primer ordre)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad , \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Punt crític: (0, 0)

Busquem la matriu hessiana: (Condició necessària de segon ordre)

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|Hf(0,0)_1| = 2 > 0 \qquad , \qquad |Hf(0,0)_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

Per tant, $Hf(0,0)$ és indefinida. Llavors, el punt $(0, 0)$ és un punt de sella.

3) $f(x, y)=x^4+(y-x^2)^2$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero: (Condició necessària de primer ordre)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 8x^3 - 4xy \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y - 2x^2$$

$$\begin{cases} 8x^3 - 4xy = 0 \\ 2y - 2x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x^3 - 4xy = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x^3 - 4x^3 = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Punt crític: $(0, 0)$

Busquem la matriu hessiana: (Condició necessària de segon ordre)

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24x^2 - 4y & -4x \\ -4x & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Observem que en aquest cas el mètode per als menors principals no decideix:

$$|Hf(0,0)_1| = 0 \quad , \quad |Hf(0,0)_2| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Utilitzem el mètode dels valors propis:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) \rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{i} \quad \lambda_2 = 2$$

Per tant, $Hf(0,0)$ és semidefinida positiva. Així, el punt $(0, 0)$ pot ser un mínim local o un punt de sella. Així doncs, hem d'estudiar què passa al voltant del punt $(0,0)$:

$f(0,0)=0^4+(0-0^2)^2=0$

Observem que $f(x, y)=x^4+(y-x^2)^2$ serà sempre positiva per a qualsevol valor de (x, y) proper a $(0,0)$. Per tant, el punt $(0,0)$ serà un mínim local.

Tema 4: Optimització amb restriccions d'igualtat

4.1 Descripció del problema

Com ja hem vist al tema anterior, l'optimització en el món empresarial i econòmic és un factor molt important. Però, evidentment, no sempre es disposa de tots els recursos i materials a l'hora d'extraure el màxim de rendibilitat, ni tampoc podem retallar tots els costos.

Tot això és degut al context real on vivim. No podem emmagatzemar qualsevol quantitat, aquesta estarà limitada per l'espai que tinguem disponible, no sempre podrem produir molts productes, aquests estaran lligats a un factor humà limitat..., i així molts altres aspectes.

Llavors, això comporta unes certes restriccions a l'hora d'optimitzar, les quals haurem de tenir en compte.

Donada $f : A \subset R^n \to R$, una funció escalar que anomenarem *funció a optimitzar* o *funció objectiu* i $g : A \subset R^n \to R^m$ una funció vectorial, tal que $m < n$ i $\vec{b} \in R^m$, on $g(x_1,\ldots,x_n)=(b_1,\ldots,b_m)$ són les restriccions; és a dir:

$$\text{Optimitzar } f(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\text{subjecta a } \begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_n) = b_1 \\ g_2(x_1,\ldots,x_n) = b_2 \\ \quad\vdots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) = b_m \end{cases}$$

on $(x_1,\ldots,x_n)$ són les variables.

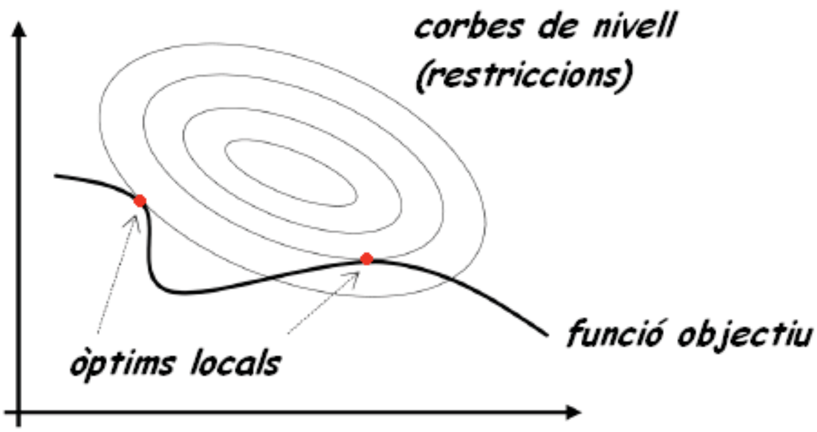
Exemple:

$$f(x,y,z) = xyz \qquad \boxed{f(x,y,z) = xyz} \rightarrow \textbf{funció objectiu}$$

$$s.a \begin{cases} x+y-z=3 \\ x-y-z=8 \end{cases} \Rightarrow s.a \begin{cases} x+y-z=3 \\ x-y-z=8 \end{cases} \rightarrow \textbf{restriccions}$$

Es denomina *conjunt factible, conjunt d'oportunitats* o *conjunt admissible* el conjunt de punts del domini de f que compleixen totes les restriccions. És a dir, el conjunt $B=\{x \in A \subset R^n \mid g(x)=b\}$.

Llavors, caldrà esbrinar els punts màxims i mínims de la funció escalar sobre el conjunt admissible B.



Imatge 23

Per poder resoldre aquest tipus de problemes utilitzarem dos mètodes:

- Mètode directe.
- Mètode dels multiplicadors de Lagrange.

Mètode directe

Aquest mètode és senzill i funciona molt bé quan a les funcions de restriccions podem aïllar unes variables en funció de les altres fàcilment. Però, no sempre serà tan senzill, ja que per a funcions més complicades (amb quadrats, arrels...) assegurar que podem aïllar variables en funció d'altres requereix la utilització del teorema de la funció implícita.

Els passos a seguir seran els següents:

1) Aïllar tantes incògnites com restriccions tinguem. Tot seguit substituir-ho a la funció objectiu.

2) Optimitzar la nova funció, tal com ho fèiem al tema anterior.

Vegem-ho amb un exemple senzill:

Exemple:

1) $f(x, y, z)=xy+xz+yz$

$s.a.\ \ x+y+z=6$

Com que tenim una equació, aïllarem una variable en funció de les altres dues. Per exemple, aïllarem la variable z.

$$x+y+z=6 \quad \rightarrow \quad z=6-x-y$$

Substituïm-ho a la funció objectiu:

$$\bar{f}(x,y) = f(x,y,6-x-y) = xy + x(6-x-y) + y(6-x-y) = -x^2 - y^2 - xy + 6x + 6y$$

Optimitzem: $\bar{f}(x,y) = -x^2 - y^2 - xy + 6x + 6y$

$$\nabla\bar{f}(x,y) = (-2x-y+6, -2y-x+6) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -2x-y+6=0 \\ -2y-x+6=0 \end{cases} \quad \rightarrow \text{ punt crític } (2,2)$$

$$H\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow H\bar{f}(2,2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow H\bar{f}(2,2) \text{ definida negativa}$$

Per tant, (2,2) és un màxim de la funció $\bar{f}(x,y)$ i, per tant, si $z=6-x-y=6-2-2=2$ tindrem que (2,2,2) és un màxim de la funció objectiu f.

A causa de les limitacions d'aquest mètode utilitzarem normalment el mètode dels multiplicadors de Lagrange, que veurem tot seguit. Aquest, a més a més, ens aportarà informació molt important dins del camp de l'economia .

4.2 Condicions d'optimitat

Mètode dels multiplicadors de Lagrange

Per poder aplicar aquest mètode cal suposar que la funció objectiu f i les restriccions g_i $i=1,\dots,m$ són funcions que admeten derivades parcials primeres i segones, i aquestes són contínues.

Funció lagrangiana:

$$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda\big(g(x) - b\big)$$

O escrit correctament:

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,\ldots,x_n) - \lambda_1\big(g_1(x_1,\ldots,x_n) - b_1\big) - \ldots - \lambda_m\big(g_m(x_1,\ldots,x_n) - b_m\big)$$

Notació: Hi ha una altra notació de la funció lagrangiana equivalent a aquesta:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda\big(b - g(x)\big)$$

Observem que si x_0 pertany al conjunt de punts o solucions factibles, és a dir, compleix totes les restriccions $g(x_0) = b$. La funció lagrangiana coincideix amb la funció objectiu:

$$L(x_0,\lambda) = f(x_0) - \lambda\big(g(x_0) - b\big) = f(x_0) - \lambda\big(b - b\big) = f(x_0)$$

Per tant, $L(x, \lambda)$ i $f(x)$ coincideixen en els punts o solucions factibles.

Condició necessària de primer ordre

Busquem les possibles solucions del problema entre els punts que satisfan:

$$\nabla L(x_0,\lambda_0) = 0\,;\ \text{és a dir,}\ \begin{cases} \dfrac{\partial L(x_0,\lambda_0)}{\partial x_i} = 0 & \forall i = 1,\ldots,n \\ \dfrac{\partial L(x_0,\lambda_0)}{\partial \lambda_j} = 0 & \forall j = 1,\ldots,m \end{cases}$$

on $\nabla L(x_0, \lambda_0)$ representa el gradient de la funció lagrangiana avaluada al punt x_0 i per les λ_0.

Exemples:

1) $f(x, y, z)=xy+xz+yz$

s.a. $x+y+z=6$

Funció lagrangiana:

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda(g(x,y,z) - b)$$

$$L(x,y,z,\lambda) = xy + xz + yz - \lambda(x + y + z - 6) = xy + xz + yz - \lambda x - \lambda y - \lambda z + 6\lambda$$

$$\nabla L(x,y,z,\lambda)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial \lambda}=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y+z-\lambda=0 \\ x+z-\lambda=0 \\ x+y-\lambda=0 \\ -x-y-z+6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z-\lambda=0 \\ x+z-\lambda=0 \\ x+y-\lambda=0 \\ -x-y-z+6=0 \end{cases} \to \begin{cases} y+z-\lambda=0 \\ z=\lambda-x \\ y=\lambda-x \\ -x-y-z+6=0 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda-x+\lambda-x-\lambda=0 \\ z=\lambda-x \\ y=\lambda-x \\ -x-\lambda+x-\lambda+x+6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x+\lambda=0 \\ z=\lambda-x \\ y=\lambda-x \\ -2\lambda+x+6=0 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda=2x \\ z=\lambda-x \\ y=\lambda-x \\ -2\lambda+x+6=0 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda=2x \\ z=\lambda-x \\ y=\lambda-x \\ -4x+x+6=0 \end{cases} \to x=y=z=2\ , \quad \lambda=4$$

El punt crític (2,2,2) amb λ=4.

2) $f(x, y, z)=x^2y+3z-6y+3x$

$$s.a. \begin{cases} y-x^2=1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

Funció lagrangiana:

$$L(x, y, z\,\lambda_1, \lambda_2)= f(x, y, z)-\lambda_1(g_1(x, y, z)-b_1)-\lambda_2(g_2(x, y, z)-b_2)$$

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2y+3z-6y+3x-\lambda_1(y-x^2-1)-\lambda_2(x-y+z-1)=$$
$$=x^2y+3z-6y+3x-\lambda_1 y+\lambda_1 x^2+\lambda_1-\lambda_2 x+\lambda_2 y-\lambda_2 z+\lambda_2$$

$$\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2}=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2xy+3+2x\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x^2-6-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ 3-\lambda_2=0 \\ -y+x^2+1=0 \\ -x+y-z+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy+3+2x\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x^2-6-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ 3-\lambda_2=0 \\ -y+x^2+1=0 \\ -x+y-z+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2xy+3+2x\lambda_1-3=0 \\ x^2-6-\lambda_1+3=0 \\ \lambda_2=3 \\ -y+x^2+1=0 \\ -x+y-z+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2xy+2x^3-6x=0 \\ \lambda_1=x^2-3 \\ \lambda_2=3 \\ -y+x^2+1=0 \\ -x+y-z+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^3 4x=0 \\ \lambda_1=x^2-3 \\ \lambda_2=3 \\ y=x^2+1 \\ -x+y-z+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x(x^2-1)=0 \\ \lambda_1=x^2-3 \\ \lambda_2=3 \\ y=x^2+1 \\ z=x^2-x+2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \\ x_3=-1 \end{cases} \\ \lambda_1=x^2-3 \\ \lambda_2=3 \\ y=x^2+1 \\ z=x^2-x+2 \end{cases}$$

Els punts crítics:
(0,1,2) amb $\lambda_1=-3$ i $\lambda_2=3$.
(1,2,2) amb $\lambda_1=-2$ i $\lambda_2=3$.
(−1,2,4) amb $\lambda_1=-2$ i $\lambda_2=3$.

Condició suficient de segon ordre:

- si $\nabla L(x_0,\lambda_0)=0$ i $HL_{\vec{x}}(x_0,\lambda_0)$ definida positiva $\Rightarrow (x_0,\lambda_0)$ mínim restringit.
- si $\nabla L(x_0,\lambda_0)=0$ i $HL_{\vec{x}}(x_0,\lambda_0)$ definida negativa $\Rightarrow (x_0,\lambda_0)$ màxim restringit.
- si $\nabla L(x_0,\lambda_0)=0$ i $HL_{\vec{x}}(x_0,\lambda_0)$ $\begin{cases}\text{semidefinida}\\ \text{indefinida}\end{cases}$ $\Rightarrow$ cal mirar què passa sobre les direccions factibles.

On $HL_{\vec{x}}(x_0, \lambda_0)$ representa la matriu hessiana de la funció lagrangiana aplicada al punt crític i amb les λ corresponents.

Què és una direcció factible?

Direm que $\vec{v}$ és una direcció factible si $Jg(x_0)=\vec{v}\cdot 0$, amb $\vec{v} \neq \vec{0}$. D'aquí obtindrem el $\nabla v=(v_1,\ldots,v_n)$. Llavors, per veure què passa en les direccions factibles cal calcular:

$$\begin{pmatrix} v_1 & . & . & . & v_n \end{pmatrix} \cdot HL_{\vec{x}}(x_0,\lambda_0) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix}$$

Per tant:

- si $\begin{pmatrix} v_1 & . & . & . & v_n \end{pmatrix} \cdot HL_{\vec{x}}(x_0,\lambda_0) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow x_0$ és un mínim restringit
- si $\begin{pmatrix} v_1 & . & . & . & v_n \end{pmatrix} \cdot HL_{\vec{x}}(x_0,\lambda_0) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow x_0$ és un màxim restringit
- si $\begin{pmatrix} v_1 & . & . & . & v_n \end{pmatrix} \cdot HL_{\vec{x}}(x_0,\lambda_0) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix} > ó < 0 \Rightarrow x_0$ és un punt de sella

Per a la resta de casos, tindríem dubtes de com classificar-ho.

Exemples: (Continuació dels exemples anteriors)

1) Havíem obtingut el punt crític (2,2,2) amb $\lambda=4$. Calculem la matriu hessiana de la funció lagrangiana:

$$HL_{(x,y,z)}(x,y,z,\lambda)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad HL_{(x,y,z)}(2{,}2{,}2{,}4)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

La matriu $HL_{(x,y,z)}(2{,}2{,}2{,}4)$ és indefinida. Mirem què passa sobre les direccions factibles:

Recordem:

$$s.a.\ \underbrace{x+y+z}_{g(x,y,z)}=6 \qquad\qquad Jg(x,y,z)=\nabla g(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$$

$$Jg(2{,}2{,}2)\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad a+b+c=0 \rightarrow \quad a=-b-c$$

Llavors, $\Delta v=(-b-c,\ b,\ c)$.

Per tant, mirem què passa $(-b-c,\ b,\ c)\cdot HL_{(x,y,z)}(2{,}2{,}2{,}4)\begin{pmatrix}-b-c\\b\\c\end{pmatrix}$

$$(-b-c,b,c)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b-c\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+c&-b&-c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b-c\\b\\c\end{pmatrix}=-2b^2-2bc-2c^2<0$$

Com que és negativa, el punt $(2{,}2{,}2)$ és un màxim restringit.

2) Havíem obtingut tres punts crítics:

• El punt crític $(0{,}1{,}2)$ amb $\lambda_1=-3$ i $\lambda_2=3$. Calculem la matriu hessiana de la funció lagrangiana:

$$HL_{(x,y,z)}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix}2y+2\lambda_1&2x&0\\2x&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad HL_{(x,y,z)}(0{,}1{,}2{,}-3{,}3)=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

La matriu $HL_{(x,y,z)}(0{,}1{,}2{,}-3{,}3)$ és semidefinida negativa. Mirem què passa sobre les direccions factibles:

Recordem:

$$s.a.\begin{cases} \overbrace{y-x^2}^{g_1(x,y,z)}=1 \\ \underbrace{x-y+z}_{g_2(x,y,z)}=1 \end{cases} \qquad Jg(x,y,z)=\begin{pmatrix} \nabla g_1(x,y,z) \\ \nabla g_2(x,y,z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Jg(0,1,2)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} b=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-c \end{cases}$$

Llavors, $\Delta v=(-c,0,c)$. Per tant, mirem què passa $(-c,0,c)\cdot HL_{(x,y,z)}(0,1,2,-3,3)\begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

$$(-c,0,c)\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4c & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}=-4c^2<0$$

Com que és negativa, el punt (0,1,2) és un màxim restringit.

- El punt crític (1,2,2) amb $\lambda_1=-2$ i $\lambda_2=3$. Calculem la matriu hessiana de la funció lagrangiana:

$$HL_{(x,y,z)}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix} 2y+2\lambda_1 & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad HL_{(x,y,z)}(1,2,2,-2,3)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu $HL_{(x,y,z)}(1,2,2,-2,3)$ és indefinida. Mirem què passa sobre les direccions factibles:

Recordem:

$$s.a.\begin{cases} \overbrace{y-x^2}^{g_1(x,y,z)}=1 \\ \underbrace{x-y+z}_{g_2(x,y,z)}=1 \end{cases} \qquad Jg(x,y,z)=\begin{pmatrix} \nabla g_1(x,y,z) \\ \nabla g_2(x,y,z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Jg(1,2,2)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} -2a+b=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=2a \\ c=a \end{cases}$$

Llavors, $\Delta v=(a,\ 2a,a)$. Per tant, mirem què passa $(a,2a,a)\cdot HL_{(x,y,z)}(1,2,2,-2,3)\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$

$$(a,2a,a)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 2a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = 8a^2 > 0$$

Com que és positiva, el punt $(1,2,2)$ és un mínim restringit.

• El punt crític $(-1,2,4)$ amb $\lambda_1=-2$ i $\lambda_2=3$. Calculem la matriu hessiana de la funció lagrangiana:

$$HL_{(x,y,z)}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix} 2y+2\lambda_1 & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to HL_{(x,y,z)}(-1,2,4,-2,3)=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu $HL_{(x,y,z)}(-1,2,4,-2,3)$ és indefinida. Mirem què passa sobre les direccions factibles:

Recordem:

$$s.a.\begin{cases} \underbrace{y-x^2}_{g_1(x,y,z)}=1 \\ \underbrace{x-y+z}_{g_2(x,y,z)}=1 \end{cases} \qquad Jg(x,y,z)=\begin{pmatrix} \nabla g_1(x,y,z) \\ \nabla g_2(x,y,z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Jg(-1,2,4)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0 \quad\to\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0 \quad\to\quad \begin{cases} 2a+b=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \to \begin{cases} b=-2a \\ c=-3a \end{cases}$$

Llavors, $\Delta v=(a,\ -2a,-3a)$.

Per tant, mirem què passa $(a,-2a,-3a)\cdot HL_{(x,y,z)}(-1,2,4,-2,3)\begin{pmatrix} a \\ -2a \\ -3a \end{pmatrix}$

$$(a,-2a,-3a)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -2a \\ -3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & -2a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -2a \\ -3a \end{pmatrix} = 8c^2 > 0$$

Com que és positiva, el punt $(-1,2,4)$ és un mínim restringit.

4.3 Anàlisi de sensibilitat

Si suposem que la funció objectiu representa el valor monetari de la producció, i els termes independents de les restriccions (les b), la quantitat disponible de cada factor productiu. Llavors, els multiplicadors de Lagrange (les λ) indicaran com varia el valor de la producció òptima per a variacions en la quantitat disponible (les b).

Per tant, podem dir que els multiplicadors de Lagrange mesuren la variació «aproximada», o el grau de sensibilitat, del valor òptim de la funció objectiu davant d'una alteració infinitesimal del terme independent (la b) de la restricció associada a cada multiplicador.

Vegem-ho amb un exemple anterior:

Exemple:

la b augmenta en una unitat

$$\begin{array}{l} f(x,y,z) = xy + xz + yz \\ s.a.\ \ x + y + z = 6 \rightarrow b \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} f(x,y,z) = xy + xz + yz \\ s.a.\ \ x + y + z = 7 \end{array}$$

Recordem que en un exemple anterior havíem calculat el valor de $\lambda = 4$. Per tant, això significa que si incrementem la nostra $b = 6$ en una unitat, és a dir, $b = 7$, això generarà un increment del valor òptim de la funció objectiu d'aproximadament 4 unitats.

Comprovem-ho:

En el cas de la funció $\begin{array}{l} f(x,y,z) = xy + xz + yz \\ s.a.\ \ x + y + z = 6 \end{array}$ hem obtingut:

Com a punt màxim el (2,2,2). I, conseqüentment, $f(2,2,2)=12$.

En el cas de la funció $\begin{array}{l} f(x,y,z) = xy + xz + yz \\ s.a.\ \ x + y + z = 7 \end{array}$ si fem els càlculs obtenim:

Com a punt màxim el $\left(\frac{7}{3},\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right)$. I, conseqüentment, $f\left(\frac{7}{3},\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right) = 16,\overset{\frown}{3}$.

Efectivament, la variació aproximada ha estat de 4 unitats.

Així doncs, si el preu del mercat d'aquests factors (preu de les b) és inferior al valor del produït (la f avaluada al valor òptim), resultarà rendible incrementar la quantitat disponible (les b). No serà així en cas contrari.

En el cas que les λ mesuren la variació d'un valor en variar una quantitat, en el sentit d'interpretació econòmica, se solen denominar *preu ombra* o *cost d'oportunitat*.

Tot això és reflecteix al teorema següent:

Teorema de sensibilitat

Sigui

$$\begin{aligned} &\text{Opt. } f(x_1,\ldots,x_n) \\ &s.a.\begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_n) = b_1 \\ \quad\vdots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) = b_m \end{cases} \end{aligned}$$

On f, g_1,...g_m són funcions amb derivades parcials primeres i segones contínues dins el conjunt factible de solucions. Tant l'òptim (x_0, λ_0), com el conjunt factible de f, depenen dels valors de $b=(b_1,\ldots, b_m)$ i expressen la funció lagrangiana com:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - b_j)$$

Es pot demostrar que:

Els multiplicadors de Lagrange λ_i associats a la i-èsima restricció mesura la tassa de variació del valor de la funció objectiu f en el punt òptim (respecte al seu correspo-nent b_i) .

$$\Delta f(x) \approx \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \Delta b_i$$

Tema 5: Optimització lineal amb restriccions de desigualtat

5.1 Descripció del problema

L'optimització amb restriccions de desigualtat és molt més recent, comparat amb l'optimització vista fins ara. Aquest tipus de problemes ens permeten aproximar-nos matemàticament més a la realitat, ja que no limiten tant intensament les restriccions de les nostres variables.

Per exemple, podem emplenar un magatzem amb diversos béns, però, pot ser que l'espai d'aquest no estigui del tot ocupat; és més, l'ocupació total dels béns pot ser des d'estar buit fins a la seva màxima capacitat.

Hi ha molts tipus de funcions, unes més complexes que d'altres. En aquest apartat, ens centrarem amb l'optimització de funcions lineals, en el que s'anomena *programació lineal*.

> La programació lineal s'empra per assignar recursos, planificar-ne la producció, l'horari de treballadors, la cartera d'inversions, i per formular estratègies de mercat (i militars). La versatilitat i l'impacte econòmic de la programació lineal en el món industrial actual són realment impressionants. (E. Lawler, 1980)

Així doncs, el tipus de problema a tractar serà el següent:

$$
\begin{aligned}
&Opt.\ \ f(x_1,\dots,x_n)\\
&s.a.\begin{cases}
g_1(x_1,\dots,x_n)\le b_1\\
\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\
g_m(x_1,\dots,x_n)\le b_m\\
\widehat{g}_1(x_1,\dots,x_n)\ge \widehat{b}_1\\
\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\
\widehat{g}_k(x_1,\dots,x_n)\ge \widehat{b}_k
\end{cases}
\end{aligned}
$$

on les funcions *f*, funció objectiu i *g*, restriccions, estan definides de R^n a *R*, i les *b* són constants de *R*.

Matricialment aquest problema s'expressa de la manera següent:

$$\begin{gathered} Opt.\ CX \\ s.a.\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{gathered}$$

On C i b són vectors, A és una matriu i X representa les n variables.

Per solucionar aquest tipus de problemes hi ha molts mètodes diversos, tots igualment vàlids.

5.2 Mètode gràfic

Aquest mètode és molt senzill i visual. Funciona molt bé en problemes de programació lineal amb dos variables, però, si aquestes en són més, ja no és tan eficient.

Vegem-ne un exemple per poder contrastar-ho:

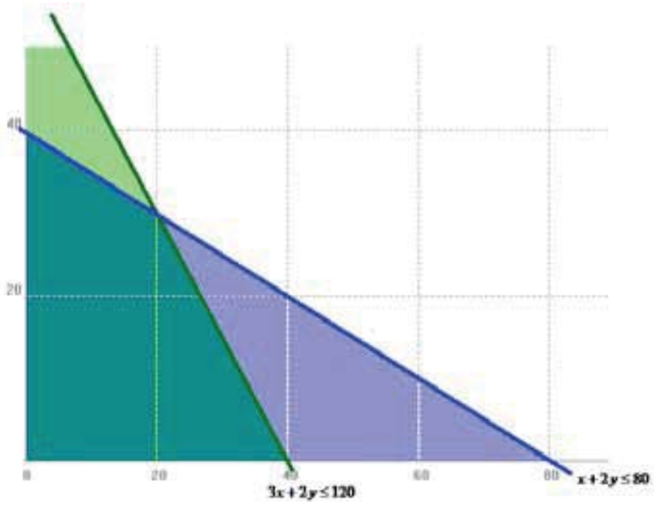
Exemples:

1)

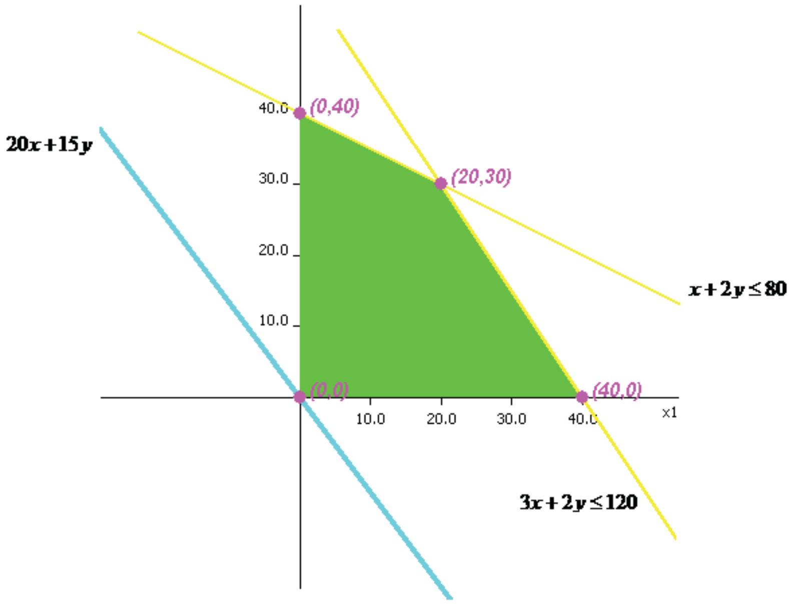
$$\begin{aligned} & Max \quad 20x + 15y \\ & s.a. \begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{cases} \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y \leq -\frac{x}{2} + 40 \\ y \leq -\frac{3x}{2} + 60 \end{aligned}\right\}$$

$$x, y \geq 0$$



Imatge 24



Imatge 25

Vèrtexs (a,b)	(0,0)	(40,0)	(20,30)	(0,40)
Valor de la funció $f(x,y)$	0	800	850	600

Veiem que el màxim s'assoleix al punt (20,30).

2)

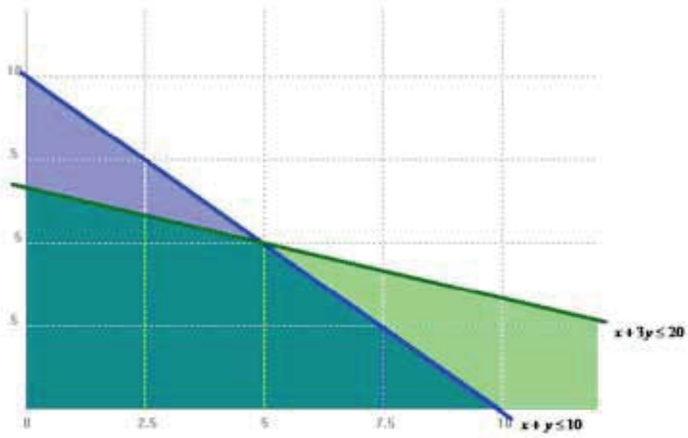
$$Min \quad 3x+5y$$

$$s.a.\begin{cases} x+y \leq 10 \\ x+3y \leq 20 \end{cases}$$

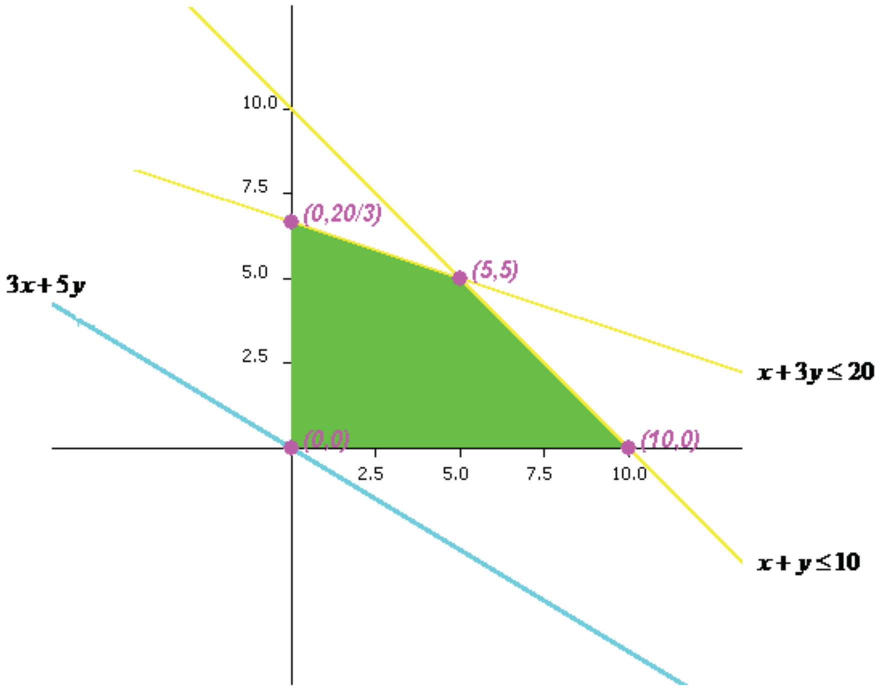
$$x, y \geq 0$$

$$\left.\begin{matrix} x+y \leq 10 \\ x+3y \leq 20 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} y \leq -x+10 \\ y \leq -\dfrac{x}{3}+\dfrac{20}{3} \end{matrix}\right\}$$

$$x, y \geq 0$$



Imatge 26

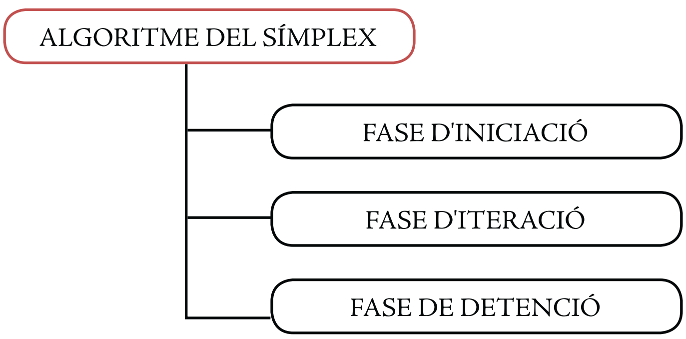


Imatge 27

Vèrtexs (a,b)	(0,0)	(10,0)	(5,5)	(0,20/3)
Valor de la funció $f(x,y)$	0	30	40	100/3

Veiem que el mínim s'assoleix al punt (0,0).

5.3 L'algoritme del símplex



Conceptes previs

Regió admissible, conjunt factible o regió de solucions possibles: És el conjunt de tots els punts factibles d'un problema de programació lineal.

Punt factible: Un punt $(x_1,...x_n)$ és factible si aquest es troba en la regió admissible o conjunt factible. És a dir, compleix totes les restriccions i, a més a més, totes les seves components són positives.

Vèrtex o vèrtex factible: Un punt $(x_1,...x_n)$ factible que es troba en un dels vèrtexs de la regió admissible o conjunt factible. És a dir, compleix totes les desigualtats i almenys dues donant lloc a la igualtat i, a més a més, les seves components són positives.

Solució òptima: Un punt $(x_1,...x_n)$ és solució òptima quan compleix totes les restriccions i, a més a més, és un màxim o mínim global de la funció objectiu.

Valor òptim: És el valor que s'obté quan s'avalua la solució òptima en la funció objectiu.

Vèrtex òptim: Un punt $(x_1,...x_n)$ que és un vèrtex o vèrtex factible i, a més a més, és solució òptima del problema.

Propietats dels problemes lineals

- El conjunt de solucions possibles d'un problema de programació lineal és convex.
- La funció objectiu és contínua i amb totes les seves derivades parcials de tots els ordres contínues. A més a més, és una funció còncava i convexa alhora.
- Es verifica que els òptims d'un problema de programació lineal sempre són **globals**, tant en els problemes de maximització com de minimització. A més a més, el conjunt de solucions òptimes és un conjunt convex.
- Les condicions necessàries d'optimitat també són suficients.

Fase d'iniciació

En aquesta fase es transforma el problema donat en la forma estàndard o ampliada.

El problema a resoldre és el següent:

$$\begin{gathered} Opt.\ f(x) \\ s.a.\ g(x) \leq b \\ x \in R^n \end{gathered}$$

Per estandarditzar el problema:

• El problema ha d'estar expressat com un problema de maximització. Si el problema inicial és de minimització, el que farem és maximitzar l'oposat; és a dir, canviar de signe la funció objectiu.

Exemples:

1)

$$\begin{aligned}&Max \quad 36x + 20y - 40z\\ &s.a.\begin{cases}3x + y - z \le 10\\ x + y - z \le 50\end{cases}\\ &x, y, z \ge 0\end{aligned}$$

Aquest problema ja està llest per maximitzar. Per tant, no caldria fer-li cap modificació, de moment.

2)

$$\begin{aligned}&Min \quad 36x + 20y - 40z\\ &s.a.\begin{cases}3x + y - z \le 10\\ x + y - z \le 50\end{cases}\\ &x, y, z \ge 0\end{aligned}$$

Aquest problema és de minimització. Per tant, per estandarditzar-lo hem de maximitzar l'oposat:

$$\begin{aligned}&Max \quad -36x - 20y + 40z\\ &s.a.\begin{cases}3x + y - z \le 10\\ x + y - z \le 50\end{cases}\\ &x, y, z \ge 0\end{aligned}$$

• El terme independent de cada restricció ha de ser positiu. En cas que no ho sigui hem de multiplicar per -1 la restricció.

Exemples:

1)

$$\begin{aligned}&Max \quad 36x + 20y - 40z\\ &s.a.\begin{cases}3x + y - z \ge -10\\ x + y - z \le 50\end{cases}\\ &x, y, z \ge 0\end{aligned}$$

Observem que el terme independent de la primera restricció és negatiu. Per tant, hem de multiplicar per -1, solament aquesta restricció.

$$\begin{array}{l} Max \quad 36x + 20y - 40z \\ s.a. \begin{cases} -3x - y + z \leq 10 \\ x + y - z \leq 50 \end{cases} \\ x, y, z \geq 0 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{l} Min \quad 36x + 20y - 40z \\ s.a. \begin{cases} 3x + y - z \leq 10 \\ x + y - z \geq -50 \end{cases} \\ x, y, z \geq 0 \end{array}$$

Fixem-nos que en aquest exemple hem de maximitzar l'oposat i hem de multiplicar per -1 la segona restricció. Per tant, ens quedarà:

$$\begin{array}{l} Max \quad -36x - 20y + 40z \\ s.a. \begin{cases} 3x + y - z \leq 10 \\ -x - y + z \leq 50 \end{cases} \\ x, y, z \geq 0 \end{array}$$

• Convertir les restriccions de desigualtat en igualtat, tot afegint variables de separació o addicionals (folgances), aquestes sempre positives. S'afegiran sumant o restant segons sigui la restricció ≤ o ≥, respectivament. També cal tenir en compte que aquestes variables de separació s'afegiran a la funció objectiu amb coeficient zero.

Exemples:

1)

$$\begin{array}{l} Max \quad 36x + 20y - 40z \\ s.a. \begin{cases} 3x + y - z \geq 10 \\ x + y - z \leq 50 \end{cases} \\ x, y, z \geq 0 \end{array}$$

Observem que el problema ja compleix els dos punts anteriors. Per tant, anem a convertir les desigualtats en igualtats:

$$\begin{aligned}
&Max \quad 36x + 20y - 40z + 0t + 0u \\
&s.a.\begin{cases} 3x + y - z - t = 10 \\ x + y - z + u = 50 \end{cases} \\
&x, y, z, t, u \geq 0
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
&Min \quad 36x + 20y - 40z \\
&s.a.\begin{cases} 3x + y - z \leq -10 \\ x + y - z \leq 50 \end{cases} \\
&x, y, z \geq 0
\end{aligned}$$

Fixem-nos que hem de maximitzar l'oposat, a més hem de multiplicar per -1 la primera restricció i, posteriorment, haurem de convertir les desigualtats en igualtats. Així doncs, ens quedarà:

$$\begin{aligned}
&Max \quad -36x - 20y + 40z + 0t + 0u \\
&s.a.\begin{cases} -3x - y + z - t = 10 \\ x + y - z + u = 50 \end{cases} \\
&x, y, z, t, u \geq 0
\end{aligned}$$

- Les variables negatives ($x_i \leq 0$) les substituirem de la manera següent: $x_i = -x'_i$, on $x'_i \geq 0$. (Això tant a les restriccions com a la funció objectiu.)

Exemple:

1)

$$\begin{aligned}
&Max \quad 36x + 20y - 40z \\
&s.a.\begin{cases} 3x + y - z \geq 10 \\ x + y - z \leq 50 \end{cases} \\
&x, y \geq 0 \quad , \quad z \leq 0
\end{aligned}$$

Observem que hem de convertir les desigualtats en igualtats i, posteriorment, hem de substituir la variable negativa per una de positiva canviada de signe. Per tant, ens quedarà:

$$\begin{aligned}&Max \quad 36x + 20y + 40z' + 0t + 0u\\&s.a.\begin{cases}3x + y + z' - t = 10\\x + y + z' + u = 50\end{cases}\\&x, y, t, u, z' \geq 0\end{aligned}$$

• Les variables que no tinguin restricció de signe se substituiran de la manera següent: $x_i = x_i' - x_i''$, on $x_i', x_i'' \geq 0$. (Això tant a les restriccions com a la funció objectiu.)

Exemple:

1)

$$\begin{aligned}&Max \quad 36x + 20y - 40z\\&s.a.\begin{cases}3x + y - z \geq 10\\x + y - z \leq 50\end{cases}\\&x, z \geq 0\end{aligned}$$

Observem que hem de convertir les desigualtats en igualtats i, posteriorment, hem de substituir la variable *y*, que no té restricció de signe per $y = y' - y''$.

$$\begin{aligned}&Max \quad 36x + 20y' - 20y'' - 40z + 0t + 0u\\&s.a.\begin{cases}3x + y' - y'' - z - t = 10\\x + y' - y'' - z + u = 50\end{cases}\\&x, y', y'', z, t, u \geq 0\end{aligned}$$

• Un cop escrit el problema en forma estàndard, seguint tots els apartats anteriors, es busca a les restriccions una base canònica de R^m, on *m* és el nombre de restriccions. Normalment aquesta base canònica vindrà donada per les variables de separació. Si no tenim aquesta base canònica, s'afegiran noves variables, que les anomenarem *variables artificials*, tot sumant-les a la restricció necessària per tal d'obtenir la base canònica. Aquestes s'inclouen a la funció objectiu amb coeficient $-w$, on $w > 0$ i arbitràriament gran per tal que no afecti el màxim.

(Aquest punt es reflecteix més clarament amb els exemples de continuació.)

Finalment, posem totes les dades en forma de taula:

Coef	*v.b.*	x_1	....	x_j	....	x_s	*B*
c_1	x_2	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1s}	b_1
c_2	x_2	a_{21}	....	a_{2j}	...	a_{2s}	b_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
c_m	x_m	a_{m1}	....		...	a_{ms}	b_m
		z_1-c_1	...	z_j-c_j	...	z_s-c_s	z^*

On:

- Les c són els coeficients de les variables x a la funció objectiu.
- Les a són els coeficients de les variables x a les restriccions.
- Les b són els termes independents de cadascuna de les restriccions.
- La z^* és el valor de la funció objectiu en el punt solució, quan es maximitza i $-z^*$ quan es minimitza.
- La columna *v.b.* és la columna de les variables bàsiques.
- La columna *Coef* és la columna dels coeficients de les variables bàsiques.
- Les z segueixen l'expressió següent:

$$z_j = \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot a_{kj}$$

És a dir, el producte del coeficients de les variables bàsiques *v.b.* en la funció objectiu (primera columna *Coef*) pels coeficients de la columna de la x_j corresponent.

Vegem-ho amb dos exemples:

Exemples:

1)

$$\begin{aligned} &Max \quad 36x + 20y - 40z \\ &s.a. \begin{cases} 3x + y - z \le 10 \\ x + y - z \le 50 \end{cases} \\ &x, y, z \ge 0 \end{aligned}$$

Estandarditzem el programa:

$$\begin{aligned} &Max \quad 36x + 20y - 40z + 0t + 0u \\ &s.a. \begin{cases} 3x + y - z + t = 10 \\ x + y - z + u = 50 \end{cases} \\ &x, y, z, t, u \ge 0 \end{aligned}$$

Emplenem la taula del símplex:

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	B
0	t	3	1	-1	1	0	10
0	u	1	1	-1	0	1	50
		-36	-20	40	0	0	**0**

Observem que:

Càlcul dels termes $z_j - c_j$:

$$Max\ \ 36x + 20y - 40z + 0t + 0u$$

$$c_1$$

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	B
0	t	3	1	-1	1	0	10
0	u	1	1	-1	0	1	50
		-36	-20	40	0	0	**0**

$$z_1 - c_1 = \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \cdot a_{k1}\right) - c_1 = 0\cdot 3 + 0\cdot 1 - 36 = -36$$

$$z_2 - c_2 = \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \cdot a_{k2}\right) - c_2 = 0\cdot 1 + 0\cdot 1 - 20 = -20$$

$$z_3 - c_3 = \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \cdot a_{k3}\right) - c_3 = 0\cdot(-1) + 0\cdot(-1) - (-40) = 40$$

$$z_4 - c_4 = \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \cdot a_{k4}\right) - c_4 = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 - 0 = 0$$

$$z_5 - c_5 = \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \cdot a_{k5}\right) - c_5 = 0\cdot 0 + 0\cdot 1 - 0 = 0$$

Tenim una base canònica de R^2 a les restriccions.

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	B
0	t	3	1	-1	1	0	10
0	u	1	1	-1	0	1	50
		-36	-20	40	0	0	**0**

El valor z^* és el següent:

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	B
0	t	3	1	-1	1	0	10
0	u	1	1	-1	0	1	50
		-36	-20	40	0	0	**0**

I tota la resta de variables amb valor 0.
Per tant, $z^* = f(0,0,0,10,50) = 36\cdot 0 + 20\cdot 0 - 40\cdot 0 + 0\cdot 10 + 0\cdot 50 = 0$

O directament multiplicant els *Coef* amb els elements de *B* i, posteriorment, sumar-los.

2)

$$
\begin{aligned}
&Min \quad -2x - 2y - 5z\\
&s.a.\begin{cases} x + 2y \geq 6 \\ x + y + z \leq 10 \end{cases}\\
&x, y, z \geq 0
\end{aligned}
$$

Estandarditzem el programa:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad 2x + 2y + 5z + 0t + 0u - wc\\
&s.a.\begin{cases} x + 2y - t + c = 6 \\ x + y + z + u = 10 \end{cases}\\
&x, y, z, t, u \geq 0
\end{aligned}
$$

Emplenem la taula del símplex:

Coef	***v.b.***	***x***	***y***	***z***	***t***	***u***	***c***	***B***
-w	*c*	*1*	*2*	*0*	*-1*	*0*	*1*	*6*
0	*u*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*10*
		-w-2	*-2w-2*	*-5*	*w*	*0*	*0*	***-6w***

Càlcul dels termes $z_j - c_j$:

$$Max \quad \underbrace{2}_{c_1}x + 2y + 5z + 0t + 0u - wc$$

Coef	***v.b.***	***x***	***y***	***z***	***t***	***u***	***c***	***B***
-w	*c*	*1*	*2*	*0*	*-1*	*0*	*1*	*6*
0	*u*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*10*
		-w-2	*-2w-2*	*-5*	*w*	*0*	***0***	***-6w***

$$z_1 - c_1 = \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \cdot a_{k1}\right) - c_1 = -w\cdot 1 + 0\cdot 1 - 2 = -w - 2$$

$$z_2 - c_2 = \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \cdot a_{k2} \right) - c_2 = -w \cdot 2 + 0 \cdot 1 - 2 = -2w - 2$$

$$z_3 - c_3 = \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \cdot a_{k3} \right) - c_3 = -w \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 5 = -5$$

$$z_4 - c_4 = \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \cdot a_{k4} \right) - c_4 = -w \cdot (-1) + 0 \cdot 0 - 0 = w$$

$$z_5 - c_5 = \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \cdot a_{k5} \right) - c_5 = -w \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0$$

$$z_6 - c_6 = \left(\sum_{k=1}^{2} c_k \cdot a_{k6} \right) - c_6 = -w \cdot 1 + 0 \cdot 0 - (-w) = 0$$

Tenim una base canònica de R^2 a les restriccions, ja que hem afegit una variable artificial c i ho hem inclòs a la funció objectiu amb coeficient $-w$.

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*c*	*B*
-w	c	1	2	0	-1	0	1	6
0	u	1	1	1	0	1	0	10
		-w-2	-2w-2	-5	w	0	0	**-6w**

El valor z^* és el següent:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*c*	*B*
-w	c	1	2	0	-1	0	1	6
0	u	1	1	1	0	1	0	10
		-w-2	-2w-2	-5	w	0	0	**-6w**

I tota la resta de variables amb valor 0.
Per tant, $z^* = f(0,0,0,0,10,6) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 10 - w \cdot 6 = -6w$

O directament multiplicant els *Coef* amb els elements de B i, posteriorment, sumar-los.

Fase d'iteració

Un cop tenim el programa estandarditzat i la taula del símplex emplenada, procedim a efectuar recursivament una sèrie de càlculs fins complir unes certes condicions.

1. Determinació de la variable no bàsica que passarà a ser bàsica.

A l'última fila de la taula del símplex, busquem el menor nombre negatiu.

(Si n'hi ha dos d'iguals qualsevol d'aquests anirà bé.)

Això ens determina la selecció d'una columna k i, per tant, la variable no bàsica que passarà a ser bàsica.

2. Determinació de la variable bàsica que passarà a ser no bàsica.

- Considerem tots els coeficients positius de la columna k seleccionada $a_{ik} > 0$.
- Calculem els quocients $\frac{b_i}{a_{ik}}$.
- El menor d'aquests quocients ens indicarà la fila h, aquesta ens determina la variable bàsica que passarà a ser no bàsica.

L'element a_{hk}, corresponent a l'encreuament de la fila h i la columna k seleccionades s'anomena *pivot* (sempre positiu).

3. Gauss.

L'objectiu serà convertir el pivot en el nombre 1 i la resta de coeficients de la columna amb zeros.

Per fer-ho, dividirem per a_{hk} tots els coeficients de la fila on es trobi el pivot. A continuació, modificarem les altres files de la manera següent:

Coeficient de la fila – Constant · Coeficient de la nova fila pivot.

Tal que la constant serà la que ens faci zero l'expressió anterior en tota la columna del pivot. És a dir, serà el coeficient a_{ik}.

$$\text{Fila pivot nova} = \frac{\text{Fila pivot vella}}{\text{pivot}}$$

$$\text{Fila nova} = \text{Fila vella} - (\text{coeficient fila vella}) \cdot \text{Fila pivot nova}$$

Mentre no es doni cap condició de detenció tornarem a començar el procés.

Fase de detenció

L'algoritme finalitzarà quan:

- Tots els elements de l'última fila siguin no negatius (els $z_i - c_i \geq 0$),

o bé,

- en el cas que algun element de l'última fila sigui negatiu ($z_k - c_k < 0$); llavors, la resta de valors de la seva columna són negatius o zero (els $a_{ik} \leq 0$).

Interpretació de la taula del símplex

Les variables bàsiques prenen el valor corresponent de la columna *B*. La resta de variables prenen el valor zero. I d'aquí extraiem el punt òptim.

El valor de la funció objectiu en el punt òptim es troba a la casella z^* en cas de maximitzar i $-z^*$ en cas de minimitzar.

Vegem aquestes dues fases seguint els dos exemples anteriors:

Exemples:

Prenent el programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} &Max \quad 36x + 20y - 40z + 0t + 0u \\ &s.a. \begin{cases} 3x + y - z + t = 10 \\ x + y - z + u = 50 \end{cases} \\ &x, y, z, t, u \geq 0 \end{aligned}$$

Taula del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
0	t	3	1	−1	1	0	10
0	u	1	1	−1	0	1	50
		−36	−20	40	0	0	0

Coef	***v.b.***	***x***	***y***	***z***	***t***	***u***	***B***
0	*t*	$\boxed{3}$	*1*	*-1*	*1*	*0*	$\boxed{10}$
0	*u*	$\boxed{1}$	*1*	*-1*	*0*	*1*	$\boxed{50}$
		$\boxed{-36}$	*-20*	*40*	*0*	*0*	***0***

El menor nombre negatiu de l'última fila és el -36 i, per tant, considerem tots els coeficients positius de la columna seleccionada. Tot seguit, calculem el quocient següent i escollim el mínim:

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \min\left\{\frac{10}{3}, \frac{50}{1}\right\} = \frac{10}{3}$$

Per tant, el pivot serà el 3.

Coef	v.b.	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
0	t	3	1	−1	1	0	10
0	u	1	1	−1	0	1	50
		−36	−20	40	0	0	0

Ara dividim el 3 entre 3 per tal de transformar-lo en un 1. I, per tant, també haurem de dividir tota la fila entre 3. I la variable no bàsica que passarà a ser bàsica serà la *x*, i la bàsica que passarà a ser no bàsica serà la *t*.

Ara farem zero tots els coeficients de la columna de la variable *x*:

$$\text{Fila 2} = \text{Fila 2} - (1) \cdot \text{Fila 1}$$

Evidentment, això afectarà tots els coeficients de la fila. I, posteriorment, els càlculs de l'última fila, els $z_i - c_i$.

Segona taula del símplex:

Coef	v.b.	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
36	x	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
0	u	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{140}{3}$	1	$\frac{140}{3}$
		0	−8	28	12	0	120

Observem que no compleix cap condició de detenció. Per tant, tornem a la fase d'iter

Coef	***v.b.***	***x***	***y***	***z***	***t***	***u***	***B***
36	*x*	3	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	*0*	$\boxed{\frac{10}{3}}$
0	*u*	*0*	$\boxed{\frac{2}{3}}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	*1*	$\boxed{\frac{140}{3}}$
		0	$\boxed{-8}$	*28*	*12*	*0*	***120***

El menor nombre negatiu de l'última fila és el −8 i, per tant, considerem tots els coeficients positius de la columna seleccionada. Tot seguit, calculem el quocient següent i escollim el mínim:

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \min\left\{\frac{10/3}{1/3}, \frac{140/3}{2/3}\right\} = 10$$

Per tant, el pivot serà el $\frac{1}{3}$.

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
36	x	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
0	u	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{140}{3}$	1	$\frac{140}{3}$
		0	-8	28	12	0	120

Ara dividim el $\frac{1}{3}$ entre $\frac{1}{3}$ (que és el mateix que multiplicar per 3), per tal de transformar-lo en un 1. I, per tant, també haurem de dividir tota la fila entre $\frac{1}{3}$ (o multiplicar per 3). I la variable no bàsica que passarà a ser bàsica serà la *y* i la bàsica que passarà a ser no bàsica serà la *x*:

Ara farem zero tots els coeficients de la columna de la variable *y*:

$$\text{Fila 2} = \text{Fila 2} - \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \text{Fila 1}$$

Evidentment, això afectarà tots els coeficients de la fila. I, posteriorment, els càlculs de l'última fila, els $z_i - c_i$.

Tercera taula del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
20	y	3	1	-1	1	0	10
0	u	-2	0	0	-1	1	40
		24	0	20	20	0	200

Observem que compleix la primera condició de detenció. Per tant, ja haurem acabat.

Per tant, el punt òptim serà el $y = 10$, $u = 40$ i la resta de variables, zero. Per tant, el punt (0,10,0) és el màxim global i el valor de la funció en aquest punt és $z^* = 200$.

2) Prenem el programa estandarditzat:

$$\begin{aligned}&Max \quad 2x + 2y + 5z + 0t + 0u - wc\\ &s.a.\begin{cases} x + 2y - t + c = 6 \\ x + y + z + u = 10 \end{cases}\\ &x, y, z, t, u \geq 0\end{aligned}$$

Taula del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*c*	*B*
−w	c	1	2	0	−1	0	1	6
0	u	1	1	1	0	1	0	10
		−w−2	−2w−2	-5	w	0	0	−6w

Coef	***v.b.***	***x***	***y***	***z***	***t***	***u***	***c***	***B***
-w	*c*	*1*	*2*	*0*	*-1*	*0*	*1*	*6*
0	*u*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*10*
		-w-2	*-2w-2*	*-5*	*w*	*0*	*0*	***-6w***

El menor nombre negatiu de l'última fila és el −2w−2 (la *w* és una constant positiva arbitràriament gran) i, per tant, considerem tots els coeficients positius de la columna seleccionada. Tot seguit, calculem el quocient següent i escollim el mínim:

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \min\left\{\frac{6}{2}, \frac{10}{1}\right\} = 3$$

Per tant, el pivot serà el 2.

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*c*	B
−w	c	1	2	0	−1	0	1	6
0	u	1	1	1	0	1	0	10
		−w−2	−2w−2	−5	w	0	0	−6w

Ara dividim el 2 entre 2 per tal de transformar-lo en un 1. I, per tant, també haurem de dividir tota la fila entre 2. I la variable no bàsica que passarà a ser bàsica serà la *y* i la bàsica que passarà a ser no bàsica serà la *c*.

Ara farem zero tots els coeficients de la columna de la variable y:

$$\text{Fila 2} = \text{Fila 2} - (1) \cdot \text{Fila 1}$$

Evidentment, això afectarà tots els coeficients de la fila. I, posteriorment, els càlculs de l'última fila, els $z_i - c_i$.

Segona taula del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*c*	*B*
2	y	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
0	u	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	7
		−1	0	−5	−1	0	1+w	6

Observem que no compleix cap condició de detenció. Per tant, tornem a la fase d'iteració:

Coef	***v.b.***	***x***	***y***	***z***	***t***	***u***	***c***	***B***
2	*y*	$\frac{1}{2}$	*1*	*0*	$-\frac{1}{2}$	*0*	$\frac{1}{2}$	3
0	*u*	$\frac{1}{2}$	*0*	$\boxed{1}$	$\frac{1}{2}$	*1*	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{7}$
		-1	*0*	$\boxed{-5}$	*-1*	*0*	*1+w*	***6***

El menor nombre negatiu de l'última fila és el −5 i, per tant, considerem tots els coeficients positius de la columna seleccionada, fixem-nos que sols n'hi ha un. Per tant, el càlcul del mínim del quocient $\frac{b_i}{a_{ik}}$ no caldrà efectuar-lo.

Per tant, el pivot serà l'1.

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*c*	*B*
2	y	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
0	u	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	7
		−1	0	−5	−1	0	1+w	6

Ara ja tenim el pivot 1; per tant, no caldrà fer res. I la variable no bàsica que passarà a ser bàsica serà la z i la bàsica que passarà a ser no bàsica serà la u.

Tampoc caldrà fer zero tots els coeficients de la columna de la variable z, perquè ja està.

Posteriorment, sí que caldrà calcular l'última fila, els $z_i - c_i$.

Segona taula del símplex:

Coef	*v.b.*	x	y	z	t	u	c	B
2	y	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
5	z	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	7
		$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	5	$-\frac{3}{2}+\mathrm{w}$	41

Observem que compleix la primera condició de detenció. Per tant, ja haurem acabat.

Per tant, el punt òptim serà el $y = 3$, $z = 7$ i la resta de variables, zero. Per tant, el punt (0,3,7) és el mínim global i el valor de la funció en aquest punt és $-z^* = -41$.

Tipologia de solucions

Després d'aplicar l'algoritme del símplex en un problema de programació lineal, ens podem trobar amb aquestes situacions:

Inexistència de solució factible:

Si hi ha alguna variable artificial bàsica; és a dir, amb valor positiu. Gràficament tindríem la regió admissible buida, ja que cap punt verificaria totes les restriccions.

Inexistència de solució òptima (solució no limitada):

Si en obtenir una solució bàsica (sense cap variable artificial bàsica), per a alguna columna $z_j - c_j < 0$ i $a_{ij} \leq 0$, és a dir, compleix la segona condició de la fase de detenció. Gràficament tindríem la regió admissible no buida, però la solució no estaria fitada. Tot i que pot passar no tenir la regió admissible limitada, però la solució sí.

Solució òptima múltiple no fitada:

Si obtenim la solució complint la primera condició de la fase de detenció, però, alguna variable no bàsica té associat el valor $z_k - c_k = 0$ i tots els valors $a_{ik} \leq 0$ en la seva columna. Gràficament tots els punts d'una aresta de la regió admissible tenen el mateix valor objectiu, i en el cas que la regió admissible no estigui limitada, aquests punts seran òptims.

Solució òptima múltiple fitada:

Si obtenim la solució complint la primera condició de la fase de detenció, però, alguna variable no bàsica té associat el valor $z_k - c_k = 0$ i hi ha algun valor $a_{ik} > 0$ en la seva columna. Si haguéssim introduït aquesta variable en la nostra base canònica obtindríem un altre punt òptim (amb el mateix valor en la funció objectiu que l'anteriorment trobat). Gràficament obtindríem dos punts com a òptims amb el mateix valor en la funció objectiu; llavors, l'òptim de la funció objectiu s'assoliria en tots els punts del segment que uneix aquests dos punts. Per tant, tindríem tantes solucions com punts en el segment.

Solució òptima única:

Quan no es dóna cap dels casos anteriors, és a dir, obtenim la solució complint la primera condició de la fase de detenció i no tenim cap variable artificial com a bàsica. A més a més, la quantitat de $z_j - c_j = 0$ coincideix exactament amb el nombre de restriccions.

5.4 Anàlisi de sensibilitat

A més a més de resoldre la problemàtica de maximitzar o minimitzar una funció amb restriccions de desigualtat, ens interessa saber com li afecten petites variacions en el terme independent de cadascuna de les restriccions.

Si tenim un problema d'optimització amb restriccions de desigualtat com el següent:

$$Opt.\ f(x_1,\dots,x_n)$$
$$s.a.\begin{cases} g_1(x_1,\dots,x_n) \leq b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ g_m(x_1,\dots,x_n) \leq b_m \\ \widehat{g}_1(x_1,\dots,x_n) \geq \widehat{b}_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \widehat{g}_k(x_1,\dots,x_n) \geq \widehat{b}_k \end{cases}$$

Llavors, la fórmula que ens relaciona la variació del valor de la funció objectiu amb la variació (variacions petites) del terme independent i-èsim és la següent:

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \Delta b_i$$

Per estudiar aquesta sensibilitat en els diferents problemes d'optimització plantejats fent ús de l'algoritme del símplex necessitarem saber el valor dels multiplicadors de Lagrange. Però com trobar-los? Vegem-ho amb dos exemples.

Per no perdre homogeneïtat, prendrem els dos exemples tractats en aquesta unitat.

Exemples:

1) Tenim el problema següent:

$$\begin{aligned} &Max \quad 36x + 20y - 40z \\ &s.a. \begin{cases} 3x + y - z \le 10 \\ x + y - z \le 50 \end{cases} \\ &x, y, z \ge 0 \end{aligned}$$

Aplicant l'algoritme del símplex havíem obtingut la solució:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
20	y	3	1	−1	1	0	10
0	u	−2	0	0	−1	1	40
		24	0	20	20	0	200

per al qual determinàvem que el màxim global era el punt (0,10,0) amb valor a la funció objectiu 200.

Com trobar els multiplicadors de Lagrange respectius a cada restricció?

Recordem quines eren les primeres variables bàsiques (les de la base canònica):

Coef	**v.b.**	**x**	**y**	**z**	**t**	**u**	**B**
0	*t*	*3*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*10*
0	*u*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*50*
		-36	*-20*	*40*	*0*	*0*	***0***

Fixem-nos que la variable bàsica de la primera línea, la *t*, serà la que ens ajudarà a obtenir el multiplicador de Lagrange de la primera restricció.

Conseqüentment, la variable bàsica de la segona línea, la *u*, serà la que ens ajudarà a obtenir el multiplicador de Lagrange de la segona restricció. I així tantes línies com restriccions, seguint l'ordre establert.

Així doncs, prenent l'última taula de l'algoritme del símplex:

$\lambda_i = z_i$ (Quan es tracta d'un problema de maximització)
$\lambda_i = -z_i$ (Quan es tracta d'un problema de minimització)

Coef	**v.b.**	**x**	**y**	**z**	**t**	**u**	**B**
$\boxed{20}$	*y*	*3*	*1*	*-1*	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	10
$\boxed{0}$	*u*	*-2*	*0*	*0*	$\boxed{-1}$	$\boxed{1}$	*40*
		24	*0*	*20*	*20*	*0*	***200***

Per tant: $\lambda_1 = 20 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 20$ i $\lambda_2 = 20 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

Llavors, si augmentem el terme independent de la primera restricció una unitat (11), el valor de la funció objectiu al màxim serà 220 i si el disminuïm una unitat (9), el valor de la funció objectiu al màxim serà 180. En canvi, qualsevol variació del terme independent de la segona restricció no afectarà el valor de la funció objectiu en el màxim.

2) Tenim el problema següent:

$$\begin{aligned} &Min \quad -2x - 2y - 5z \\ &s.a.\begin{cases} x + 2y \geq 6 \\ x + y + z \leq 10 \end{cases} \\ &x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

Aplicant l'algoritme del símplex havíem obtingut la solució:

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	c	B
2	y	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
5	z	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	7
		$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	5	$-\frac{3}{2}+w$	41

pel qual determinàvem que el mínim global era el punt (0,3,7) amb valor a la funció objectiu -41.

Com trobar els multiplicadors de Lagrange respectius a cada restricció?

Recordem quines eren les primeres variables bàsiques (les de la base canònica):

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*c*	*B*
-w	*c*	~~*1*~~	~~*2*~~	~~*0*~~	~~*-1*~~	*0*	*1*	*6*
0	*u*	~~*1*~~	~~*1*~~	~~*1*~~	~~*0*~~	*1*	*0*	*10*
		-w-2	*-2w-2*	*-5*	*w*	*0*	*0*	***-6w***

Fixem-nos que la variable bàsica de la primera línea, la *c*, serà la que ens ajudarà a obtenir el multiplicador de Lagrange de la primera restricció.

Conseqüentment, la variable bàsica de la segona línea, la *u*, serà la que ens ajudarà a obtenir el multiplicador de Lagrange de la segona restricció.

I així tantes línies com restriccions, seguint l'ordre establert.

Així doncs, prenent l'última taula de l'algoritme del símplex:

$\lambda_i = z_i$ (Quan es tracta d'un problema de maximització)

$\lambda_i = -z_i$ (Quan es tracta d'un problema de minimització)

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	c	B
$\boxed{2}$	y	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{0}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	3
$\boxed{5}$	z	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	7
		$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	5	$-\frac{3}{2}+w$	**41**

Per tant: $\lambda_1 = -\left(2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}$ i $\lambda_2 = -(2 \cdot 0 + 5 \cdot 1) = -5$.

Llavors, si augmentem el terme independent de la primera restricció una unitat (7) el valor de la funció objectiu al mínim serà $-\frac{79}{2}$, i si el disminuïm una unitat (5) el valor de la funció objectiu al mínim serà $-\frac{85}{2}$. En canvi, si augmentem el terme independent de la segona restricció una unitat (11), el valor de la funció objectiu serà -46 i si el disminuïm una unitat (9), el valor de la funció objectiu al mínim serà -36.

Tema 6: Successions i sèries de nombres reals

6.1 Successions de nombres reals

Què és una successió?
Una successió de nombres reals és un conjunt infinit de nombres, ordenats tal que segueixen alguna regla de formació. La denotarem per $\{a_n\}_{n\in N}$.

Exemples:

1) 2,4,6,8,10,12,14...
2) 1,2,3,4,5,6,7,8...
3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}...$

Cada element que forma la successió s'anomena *terme de la successió* i es denota per a_i, on i és la posició que ocupa.

Exemples:

1) *2,4,6,8,10,12,14...*	on	$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6, a_4 = 8...$
2) *1,2,3,4,5,6,7,8...*	on	$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3, a_4 = 4...$
3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}...$	on	$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}...$

Què és el terme general?

El terme general d'una successió és una expressió que relaciona cada terme de la successió amb la posició que ocupa. És a dir, ens indica què fa la successió, quina norma o regla de transformació segueix.

Exemples:

1) *2,4,6,8,10,12,14...* on $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$... Terme general: $a_n = 2n$

2) *1,2,3,4,5,6,7,8....* on $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$... Terme general: $a_n = n$

3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ .... on $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$... Terme general: $a_n = \frac{1}{n}$

De successions n'hi ha moltes, entre d'altres, les progressions i, en particular, les progressions geomètriques.

Progressions geomètriques

Què són les progressions geomètriques?
Les progressions geomètriques són un tipus de successions, tal que per passar d'un terme al següent el que fem és multiplicar per un nombre real. Aquest nombre s'anomena la *raó* i el denotarem per *r*.

$$\times 2 \qquad \{a_n\} = \{\underbrace{1}_{a_1},\underbrace{2}_{a_2},\underbrace{4}_{a_3},\underbrace{8}_{a_4},\underbrace{16}_{a_5},\dots\}$$

$$\times \frac{1}{3} \qquad \{b_n\} = \left\{\underbrace{\frac{1}{3}}_{b_1},\underbrace{\frac{1}{9}}_{b_2},\underbrace{\frac{1}{27}}_{b_3},\underbrace{\frac{1}{81}}_{b_4},\dots\right\}$$

Per tant, la raó de la successió $\{a_n\}_{n\in N}$ serà $r = 2$ i la raó de la successió $\{b_n\}_{n\in N}$ serà $r = \frac{1}{3}$.

Així doncs, direm que la successió $\{a_n\}_{n\in N}$ i $\{b_n\}_{n\in N}$ són progressions geomètriques de raó 2 i $\frac{1}{3}$, respectivament .

Una progressió geomètrica tindrà la forma següent:

$$\{a_n\}_{n\in N} = a \cdot r^n$$

on a pot ser un nombre real qualsevol i la raó r està elevada a n.
A més, la seva construcció, com hem vist, segueix la relació següent: $a_{n+1} = r \cdot a_n$

Exemples:

1) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ progressió geomètrica de raó $r = \frac{2}{3}$.

2) $a_n = \frac{1}{4^n}$ progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{4}$.

3) $a_n = (\sqrt{5})^{n+1} = \sqrt{5} \cdot (\sqrt{5})^n$ progressió geomètrica de raó $r = \sqrt{5}$.

Convergència de successions

El concepte convergència de successions fa referència a cap a quin valor s'aproxima la successió quan ens fixem amb els termes *de la cua*.

Una successió que té límit a l'infinit, finit s'anomena *successió convergent*, una que té límit a l'infinit, infinit, s'anomena *successió divergent*; i, a més a més, una successió de números reals és oscil·lant si i només si no és convergent ni divergent. És a dir, donada una successió $\{a_n\}_{n \in N}$:

Si $\lim_{n \to +\infty} a_n = k \Rightarrow \{a_n\}_{n \in N}$ és convergent.

Si $\lim_{n \to +\infty} a_n = \infty$ o bé $\nexists \Rightarrow \{a_n\}_{n \in N}$ és divergent.

Si $\lim_{n \to +\infty} a_n = \nexists \Rightarrow \{a_n\}_{n \in N}$ és oscil·lant.

Exemples:

1) $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \rightarrow a_n = \frac{1}{n}$ és convergent

2) $a_n = 2n \rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} 2n = +\infty \rightarrow a_n = 2n$ és divergent

3) $a_n = (-1)^n \rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} (-1)^n = \nexists \rightarrow a_n = (-1)^n$ és oscil·lant

Observem que aquesta última successió $a_n = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1 \ldots\}$ és, efectivament, una successió oscil·lant, ja que pren els valors 1 i -1 alternadament.

6.2 Sèries de nombres reals

Què és una sèrie?

De manera intuïtiva podem dir que una sèrie de nombres reals és la suma dels infinits termes d'una successió $\{a_n\}_{n\in N}$. La denotarem per:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.$$

on el símbol $\sum$ (anomenat *sumatori*) indica sumar i, a sota i sobre s'indica des de, i fins a quin subíndex s'ha de realitzar la dita suma.

Tenint en compte que una successió té un nombre de termes infinit, aprendrem a sumar sumes infinites.

Denotarem per $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ la suma dels n primers termes d'una successió. Aquesta S_n és una successió, anomenada *successió de sumes parcials*.

Per tant: Per sumar infinits termes d'una successió en diem *sèrie* i per sumar una quantitat finita de termes en diem *suma parcial de n termes*. Per tant, el $S_\infty = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ és una sèrie.

En el cas en què la successió $\{a_n\}_{n\in N}$ és una progressió geomètrica (n'hi ha d'altres), hi ha fórmules per calcular aquestes sumes parcials, sense haver de sumar un a un cada terme.

Si el sumatori és finit: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ i $r \neq 1 \Rightarrow \quad S_n = a_1 \dfrac{1-r^n}{1-r}$.

Si el sumatori és infinit: $S_\infty = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ i $|r|<1 \Rightarrow \quad S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r}$.

Per a la resta de casos, la suma és infinita o no es pot calcular.

Exemples:

1) $S_5 = \sum_{n=1}^{5} 2^n = 2 \cdot \dfrac{1-2^5}{1-2} = 2 \cdot \dfrac{-31}{-1} = 62$

2) $S_{10} = \sum_{n=1}^{10} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1-\dfrac{1}{1024}}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\dfrac{1023}{1024}}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1023}{1024}$

3) $S_\infty = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n = +\infty$ (No es pot calcular amb la fórmula)

4) $S_\infty = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}} = 1$

Convergència de sèries

- Una sèrie $\sum a_n$ és convergent si $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = k$.
- Una sèrie $\sum a_n$ és divergent si $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Teorema: (Condició necessària de convergència)

$$\boxed{\text{Si la sèrie } \sum a_n \text{ és convergent, llavors } \lim_{n \to +\infty} a_n = 0.}$$

Atenció: El recíproc d'aquest teorema no és cert!

(Per tant: Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \neq 0$ tindrem que $\sum a_n$ no és convergent.)

Propietats

Sigui $\{a_n\}_{n \in N}$ i $\{b_n\}_{n \in N}$ dues successions convergents, llavors:

- $\sum a_n + \sum b_n = \sum a_n + b_n$
- $\sum k \cdot a_n = k \cdot \sum a_n$ on $k \in R$.

6.3 Sèrie geomètrica

En la vida quotidiana ens veiem immersos en un cúmul de situacions de préstecs, inversions... En totes aquestes situacions s'utilitzen les progressions, i en particular les progressions geomètriques, d'aquí la importància d'aquesta eina matemàtica.

La utilitat de la sèrie geomètrica es reflecteix clarament amb el càlcul de capitalitzacions i amb el càlcul d'amortitzacions.

Anomenarem *sèrie geomètrica* a la suma infinita dels termes d'una progressió geomètrica; és a dir:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ és una sèrie geomètrica si } \{a_n\}_{n \in N} \text{ és una progressió geomètrica}$$

Convergència d'una sèrie geomètrica

Com hem vist per determinar si una sèrie és convergent o divergent, hem de calcular el límit de la successió de sumes parcials de *n* termes:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} = \begin{cases} \dfrac{a_1}{1-r} & si\ |r|<1 \\ \pm\infty & si\ r\geq 1 \\ no\ existeix & si\ r\leq -1 \end{cases}$$

Per tant, la sèrie geomètrica sols és convergent per $|r|<1$. En el cas que $r \geq 1$ la sèrie és divergent i, per tant, el seu valor és infinit i per $r<1$ no es pot calcular.

Càlcul del valor d'una sèrie geomètrica

Si la sèrie geomètrica sols és convergent per $|r|<1$; llavors, solament podrem calcular el seu valor per a aquests casos.

La fórmula per calcular el valor d'una sèrie geomètrica és la següent:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r} \qquad \left(\frac{primer\ terme - (últim+1)\ terme}{1 - raó} \right)$$

Nota: Aquesta fórmula engloba les definides anteriorment per a S_k, però cal anar amb compte quan les condicions són de la r i la n.

Exemples:

$$1)\ \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{32}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{15}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{30}{32} = \frac{15}{16} \qquad 2)\ \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}-0}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

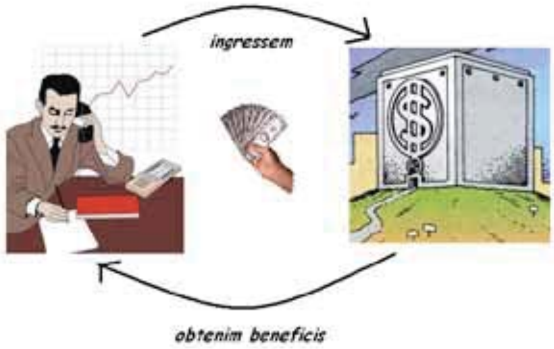
$$3)\ \sum_{i=5}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{32}-0}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

Sembla lògic que la suma de l'exemple 1) i de l'exemple 3), ha de ser l'exemple 2):

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{i=5}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{15}{16}+\frac{1}{16} = 1$$

Aplicació econòmica

Exemple:
Ingressem en un banc 30.000 euros (capital inicial), el banc ens paga un interès compost anual del 4%. És a dir, cada any obtenim un 4% de beneficis sobre el capital invertit. Quin capital obtenim al cap de cinc anys?

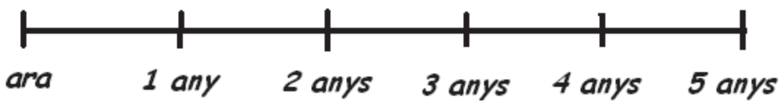


Fórmula del capital que obtindrem C_n, en invertir un capital inicial C = 30.000 euros al r = 0,04 de tipus d'interès compost anual. Durant n = 5 anys.

$$C_n=C(1+r)^n$$

$C_1=C(1+r)$
$C_2=C_1(1+r)=C(1+r)^2$
$C_3=C_2(1+r)=C(1+r)^3$
$C_4=C_3(1+r)=C(1+r)^4$
$C_5=C_4(1+r)=C(1+r)^5 \rightarrow C_5=C(1+r)^5 = 30000 \cdot (1'04)^5 = 36499'59$ euros

Fixem-nos que és una progressió geomètrica de raó $1 + r$; així doncs, cada terme (anualitat) l'obtindrem a partir de $C_{n+1}=C_n(1+r)$



$C_1=30000 \cdot (1+0,04) = 31200$

$C_2=31200 \cdot (1+0,04) = 32448$

$C_3=32448 \cdot (1+0,04) = 33745,92$

$C_4=33745,92 \cdot (1+0,04) = 35095,76$

$C_5=35095,76 \cdot (1+0,04) = 36499,59$

EXERCICIS

Exercicis del tema 1: Formes quadràtiques

1. Considereu les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Doneu l'expressió polinòmica de les formes quadràtiques associades a cadascuna d'aquestes.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$q_A : \mathrm{R}^3 \longrightarrow \mathrm{R}$$

$$(x,y,z) \longmapsto (x,y,z)\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+y-z & x-y+z & -x+y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} =$$

$$= 2x^2 + yx - zx + xy - y^2 + zy - xz + yz =$$

$$= 2x^2 - y^2 + 2xy - 2xz + 2yz$$

Per tant, l'expressió polinòmica de la forma quadràtica serà:

$$q_A(x,y,z) = 2x^2 - y^2 + 2xy - 2xz + 2yz$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$q_B : \mathrm{R}^3 \longrightarrow \mathrm{R}$$

$$(x,y,z) \longmapsto (x,y,z)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & -x & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -yx - xy + z^2$$

Per tant, l'expressió polinòmica de la forma quadràtica serà:

$$q_B(x,y,z) = -2xy + z^2$$

b) Calculeu les imatges de $(1,1,1)$ i $(-1,-1,-1)$.

$$q_A(1,1,1) = 2\cdot 1^2 - 1^2 + 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 = 3$$
$$q_A(-1,-1,-1) = 2(-1)^2 - (-1)^2 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) - 2\cdot(-1)\cdot(-1) + 2\cdot(-1)\cdot(-1) = 3$$

$$q_B(1,1,1) = -2\cdot 1\cdot 1 + 1^2 = -1$$
$$q_B(-1,-1,-1) = -2\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1)^2 = -1$$

2. Determineu la matriu associada a les formes quadràtiques de R^3 següents:

a) $q_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3$

$$ax_1^2 + dx_2^2 + fx_3^2 + 2bx_1x_2 + 2cx_1x_3 + 2ex_3x_2 = x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ d = -3 \\ f = -1 \\ 2b = 0 \\ 2c = 0 \\ 2e = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ d = -3 \\ f = -1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ e = -3 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $q_2(x,y,z) = 3x^2 - 4xy + y^2 - yz + z^2$

$$ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2byx + 2czx + 2ezy = -3x^2 - 4xy + y^2 - yz + z^2$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ d = 1 \\ f = 1 \\ 2b = -4 \\ 2c = 0 \\ 2e = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ d = 1 \\ f = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \\ e = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sigui la forma quadràtica $q : R^3 \rightarrow R$, expressada per $q(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$.

a) Escriviu la matriu associada i trobeu la imatge del vector $(1,1,1)$.

$$ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2byx + 2czx + 2ezy = 2xy + 2xz + 2yz$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ f = 0 \\ 2b = 2 \\ 2c = 2 \\ 2e = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ f = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ e = 1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q(1,1,1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$$

b) Determineu els valors propis i classifiqueu la forma quadràtica.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \ \textit{(multiplicitat doble)},\ \lambda_2 = 2$$

4. Classifiqueu les formes quadràtiques següents:

a) $q_1(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2$ és definida positiva, ja que prenent qualsevol vector si fem la suma de les seves components al quadrat i multiplicades per un nombre positiu sempre serà positiu, excepte el vector nul.

b) $q_2(x,y,z) = x^2 + y^2$ és semidefinida positiva, ja que prenent qualsevol vector si fem la suma de les seves components al quadrat sempre serà positiu o zero, i hi ha vectors no nuls, per exemple, el (0,0,3) tal que la forma quadràtica és 0.

c) $q_3(x,y) = x^2 + 2y^2$ és definida positiva, ja que prenent qualsevol vector si fem la suma de les seves components al quadrat i multiplicat per un nombre positiu sempre serà positiu, excepte el vector nul.

d) $q_4(x,y) = -x^2 + xy - y^2$

Busquem la matriu associada a aquesta forma quadràtica:

$ax^2 + 2byx + cy^2 = -x^2 + xy - y^2$

Per tant:

$$\begin{cases} a = -1 \\ 2b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = -1 \end{cases}$$

Així ens queda la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Apliquem el mètode utilitzant els valors propis de A:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 + 2\lambda + \frac{3}{4}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + \frac{3}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2} \quad , \lambda_2 = -\frac{3}{2}$$

Atès que tots els valors propis són negatius, tindrem que la forma quadràtica és definida negativa.

Apliquem el mètode utilitzant els menors principals de A:

$$|A_1| = -1 \quad , \quad |A_2| = \begin{vmatrix} -1 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$$

Com que $|A| = |A_2| = \dfrac{3}{4} \neq 0$ i els menors principals de la matriu associada alternen el signe (imparell negatiu i parell positiu) tindrem que la forma quadràtica és definida negativa.

e) $q_5(x, y, z) = 3x^2 + 11y^2 - 6xy$

Busquem la matriu associada a aquesta forma quadràtica:

$ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2byx + 2czx + 2ezy = 3x^2 + 11y^2 - 6xy$

Per tant:

$$\begin{cases} a = 3 \\ 2b = -6 \\ c = 0 \\ d = 11 \\ 2e = 0 \\ f = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 11 \\ e = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$

Així ens queda la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Apliquem el mètode utilitzant els valors propis de A:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 11-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(11-\lambda)(-\lambda) + 9\lambda = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 24\lambda$$

$$-\lambda^3 + 14\lambda^2 - 24\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = 12$$

Atès que tots els valors propis són positius o zero, tindrem que la forma quadràtica és semidefinida positiva.

Apliquem el mètode utilitzant els menors principals de A:

$$|A_1| = 3 \quad , \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 24 \quad , \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Com que $|A| = |A_3| = 0$ i els menors principals $|A_1| > 0$, $|A_2| > 0$ i $|A_3| = 0$ són positius els dos primers; llavors, la forma quadràtica és semidefinida positiva .

f) $q_6(x, y, z) = x^2 + 2xy + z^2 - 2yz$

Busquem la matriu associada a aquesta forma quadràtica:

$$ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2byx + 2czx + 2ezy = x^2 + 2xy + z^2 - 2yz$$

Per tant:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2b = 2 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ 2e = -2 \\ f = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = -1 \\ f = 1 \end{cases}$$

Així ens queda la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Apliquem el mètode utilitzant els valors propis de A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -1 \quad , \quad \lambda_3 = 2$$

Com que hi ha valors propis positius i negatius, tindrem que la forma quadràtica és indefinida.

Apliquem el mètode utilitzant els menors principals de A:

$$|A_1| = 1 \quad , \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad , \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Si $|A| = |A_3| = -2 \neq 0$ i els menors principals de la matriu associada són positius i negatius, però el $|A_2| < 0$ i té subíndex parell; llavors, la forma quadràtica és indefinida.

$g)$ $q_7(x,y,z,t) = x^2 - y^2 + z^2 + t^2 + xy - 2xz + 4yt + 2zt$

Busquem la matriu associada a aquesta forma quadràtica:

$$ax^2 + ey^2 + hz^2 + jt^2 + 2bxy + 2cxz + 2fzy + 2dtx + 2gty + 2itz = x^2 - y^2 + z^2 + t^2 + xy - 2xz + 4yt + 2zt$$

Per tant, ens queda la matriu:

$$\begin{cases} a=1 \\ 2b=1 \\ 2c=-2 \\ 2d=0 \\ e=-1 \\ 2f=0 \\ 2g=4 \\ h=1 \\ 2i=2 \\ j=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=-1 \\ d=0 \\ e=-1 \\ f=0 \\ g=2 \\ h=1 \\ i=1 \\ j=1 \end{cases} \rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Apliquem el mètode utilitzant els valors propis de A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda^3 - \frac{25}{4}\lambda^2 + \frac{21}{2}\lambda + 3$$

$$.\lambda^4 - \lambda^3 - \frac{25}{4}\lambda^2 + \frac{21}{2}\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda_1 \approx 2'3441 \ , \ \lambda_2 \approx -0'25148 \ , \ \lambda_3 \approx 1'8609 \ i \ \lambda_4 \approx 2'7348$$

Atès que hi ha valors propis positius i negatius, tindrem que la forma quadràtica és indefinida.

Nota: Aquest mètode amb matrius d'ordre 4 és fa una mica feixuc, a causa de la problemàtica de resoldre una equació de quart grau. Per tant, serà recomanable utilitzar l'altre mètode.

Apliquem el mètode utilitzant els menors principals de A:

$$|A_1| = 1 \ , \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{5}{4} \ , \ |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \ , \ |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Com que $|A| = |A_4| = 3 \neq 0$ i els menors principals de la matriu associada són positius i negatius però el $|A_1| > 0$ i té subíndex senar; llavors, la forma quadràtica és indefinida.

h) $q_8(x,y,z,t) = x^2 + y^2 - z^2 - t^2 + 4xy + 3xt + 4yt + 2zt$

Busquem la matriu associada a aquesta forma quadràtica:

$$ax^2 + ey^2 + hz^2 + jt^2 + 2bxy + 2cxz + 2fzy + 2dtx + 2gty + 2itz = x^2 + y^2 - z^2 - t^2 + 4xy + 3xt + 4yt + 2zt$$

Per tant, ens queda la matriu:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2b = 4 \\ 2c = 0 \\ 2d = 3 \\ e = 1 \\ 2f = 0 \\ 2g = 4 \\ h = -1 \\ 2i = 2 \\ j = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \\ d = \frac{3}{2} \\ e = 1 \\ f = 0 \\ g = 2 \\ h = -1 \\ i = 1 \\ j = -1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Apliquem el mètode utilitzant els valors propis de A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \frac{53}{4}\lambda^2 - 18\lambda - \frac{23}{4}$$

$$\lambda^4 - \frac{53}{4}\lambda^2 - 18\lambda - \frac{23}{4} = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1 \ , \ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \ , \ \lambda_3 = \frac{\sqrt{193}}{4} + \frac{3}{4} \ i \ \lambda_4 = -\frac{\sqrt{193}}{4} + \frac{3}{4}$$

Atès que hi ha valors propis positius i negatius, tindrem que la forma quadràtica és indefinida.

Nota: Aquest mètode amb matrius d'ordre 4 és fa una mica feixuc a causa de la problemàtica de resoldre una equació de quart grau. Per tant, serà recomanable utilitzar l'altre mètode.

Apliquem el mètode utilitzant els menors principals de A:

$$|A_1| = 1 \;,\; |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \;,\; |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \;,\; |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{23}{4}$$

Com que $|A| = |A_4| = -\frac{23}{4} \neq 0$ i els menors principals de la matriu associada són positius i negatius, però el $|A_1| > 0$ i té subíndex senar; llavors, la forma quadràtica és indefinida.

5. Considereu la forma quadràtica amb matriu associada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Doneu l'expressió polinòmica associada a aquesta forma quadràtica.

$$q_A : R^3 \longrightarrow R$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3z & 4y & 3x+z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= x^2 + 3xz + 4y^2 + 3xz + z^2 =$$

$$= x^2 + 6xz + 4y^2 + z^2$$

Per tant, l'expressió polinòmica de la forma quadràtica serà:

$$q_A(x, y, z) = x^2 + 6xz + 4y^2 + z^2$$

b) Calculeu els valors propis de la forma quadràtica.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda) - 9(4-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 4 \;\; \text{(multiplicitat doble)}, \;\; \lambda_2 = -2$$

c) Classifiqueu-la.

Atès que la matriu associada a la forma quadràtica té valors propis positius i negatius, podem dir que la forma quadràtica és indefinida.

6. Considereu la forma quadràtica amb matriu associada $A=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&8\end{pmatrix}$.

a) Doneu l'expressió polinòmica de la forma quadràtica.

$$q_A : R^3 \longrightarrow R$$

$$(x,y,z) \longmapsto (x,y,z)\cdot\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+5y & 5x+2y & 8z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} =$$
$$= 2x^2+5xy+5xy+2y^2+8z^2 =$$
$$= 2x^2+2y^2+8z^2+10xy$$

Per tant, l'expressió polinòmica de la forma quadràtica serà:

$$q_A(x,y,z) = 2x^2+2y^2+8z^2+10xy$$

b) Calculeu els valors propis.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 5 & 0\\ 5 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 8-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(8-\lambda)-25(8-\lambda) = -\lambda^3+12\lambda^2-11\lambda-168$$

$$-\lambda^3+12\lambda^2-11\lambda-168=0 \quad \to \quad \lambda_1=-3 \quad , \quad \lambda_2=7 \quad \text{i} \quad \lambda_3=8$$

c) Classifiqueu la forma quadràtica.

Atès que la matriu associada a la forma quadràtica té valors propis positius i negatius, podem dir que la forma quadràtica és indefinida.

7. De les quatre afirmacions, només una és certa i les altres són falses. Sigui A una matriu quadrada d'ordre n que verifica $A=A^t$. Llavors,

a) $\det A \neq 0$

No, ja que, per exemple, podem prendre la matriu nul·la d'ordre n

$$A = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & & 0 \end{pmatrix}$$, aquesta matriu compleix la condició de $A=A^t$ i el det$A=0$.

b) A no és la matriu associada a una forma quadràtica.

No, hem definit que la matriu associada a una forma quadràtica havia de ser simètrica i aquesta condició és equivalent a $A=A^t$.

c) Tots els valors propis de A són reals.

Sí, això és degut a la simetria de la matriu associada a la forma quadràtica.

d) A no és simètrica.

No, es contradiu amb l'enunciat, ja que A és simètrica $\Leftrightarrow$ $A=A^t$.

Exercicis del tema 2:
Funcions de diverses variables

8. Determineu el domini de les funcions següents:

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

Aquesta funció no estarà definida pels valors que anul·len el denominador i pels valors del radicand de l'arrel que la facin negativa.

$$\begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0 \\ 1 - x^2 - y^2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - x^2 - y^2 < 0 \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 \geq 1\,.$$

Llavors, no estarà definida per tots els punts $x^2 + y^2 \geq 1$.

Per tant, el domini de la funció $f(x, y)$ és:

$$Dom\, f(x, y) = \{(x, y) \in R^2 |\, x^2 + y^2 < 1\}$$

b) $f(x, y) = \sqrt{\ln(y - x^2)}$

Aquesta funció no estarà definida pels valors del radicand de l'arrel que la facin negativa i, a més a més, pels valors que anul·len o facin negatiu el logaritme neperià.

$$\begin{cases} \ln(y - x^2) < 0 \\ y - x^2 \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - x^2 < 1 \\ y - x^2 \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y < 1 + x^2 \\ y \leq 0 + x^2 \end{cases} \rightarrow y \leq 0 + x^2$$

Llavors, no estarà definida per tots els punts $y \leq x^2$.

Per tant, el domini de la funció $f(x,y)$ és:

$$Dom\ f(x,y) = \{(x,y) \in R^2 |\ y > x^2\}$$

9. Estudieu les corbes de nivell de les funcions següents:

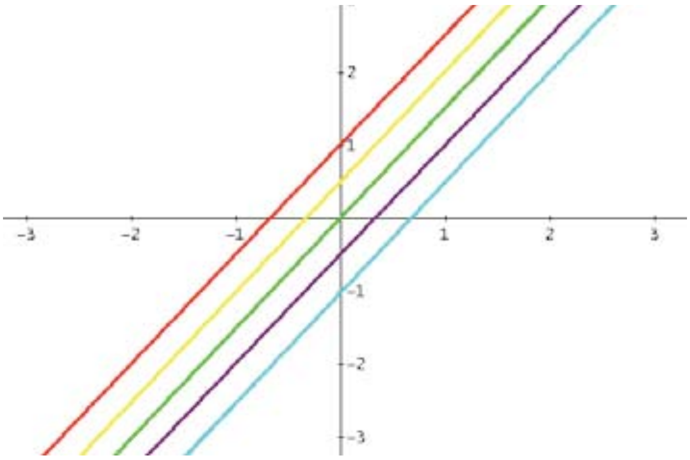
a) $f(x, y) = 3x + 2y$

Igualem la funció a k i aïllem la y:

$$3x - 2y = k \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{3x - k}{2}$$

Donem valors a la k i observem que obtenim rectes:

$$\begin{cases} k = 0 & y = \dfrac{3x}{2} \\ k = 1 & y = \dfrac{3x - 1}{2} \\ k = 2 & y = \dfrac{3x - 2}{2} \\ k = -1 & y = \dfrac{3x + 1}{2} \\ k = -2 & y = \dfrac{3x + 2}{2} \end{cases}$$



Imatge 28

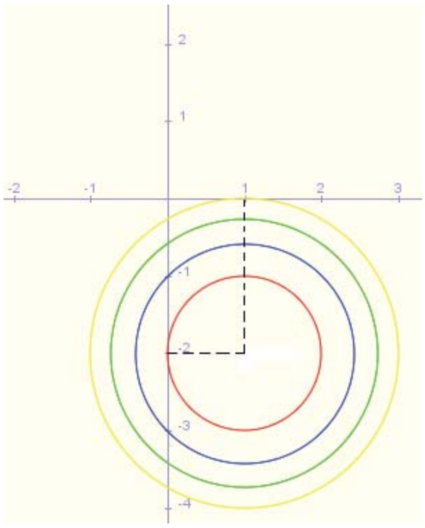
b) $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+2)^2$

Igualem la funció a k i observem que obtenim una circumferència de radi $\sqrt{k}$ i centrada en el punt $(1,-2)$:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = k \qquad \text{on} \qquad k \geq 0$$

Donem valors a la k i observem que obtenim circumferències:

$$\begin{cases} k=1 & (x-1)^2+(y+2)^2=1 \\ k=2 & (x-1)^2+(y+2)^2=2 \\ k=3 & (x-1)^2+(y+2)^2=3 \\ k=4 & (x-1)^2+(y+2)^2=4 \end{cases}$$



Imatge 29

10. Calculeu els límits següents:

a)

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy^2-y^2+x-1}{x-1} = \frac{0}{0} \underset{(1)}{=} \lim_{r\to 0} \frac{(1+r\cdot\cos\theta)\cdot r^2\cdot\sin^2\theta - r^2\cdot\sin^2\theta+1+r\cdot\cos\theta-1}{1+r\cdot\cos\theta-1} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^2\cdot\sin^2\theta + r^3\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta - r^2\cdot\sin^2\theta + r\cdot\cos\theta}{r\cdot\cos\theta} = \lim_{r\to 0}\frac{r\cdot\left(r^2\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta+\cos\theta\right)}{r\cdot\cos\theta} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\cos\theta(r^2\cdot\sin^2\theta+1)}{\cos\theta} = \lim_{r\to 0} r^2\frac{\cos\theta}{\cos\theta} = (*)$$

(1) Canvi amb coordenades polars:

$$\begin{cases} x = 1 + r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta \end{cases}$$

(*) Aquest límit és 1 quan cosθ≠0, en els casos en què $\theta = \frac{\pi}{2}+2\pi k$ o bé $\theta = \frac{3\pi}{4}+2\pi k$ per $k\in\mathbb{Z}$ el límit no existeix. Per tant el límit no existeix.

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \frac{0}{0} \underset{(1)}{=} \lim_{r\to 0}\frac{r^2\cdot\cos^2\theta\cdot r^2\cdot\sin^2\theta}{r^4\cdot\cos^4\theta+r^4\cdot\sin^4\theta} = \lim_{r\to 0}\frac{r^4\cdot\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta}{r^4\cdot\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta} = \frac{\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$$

(1) Canvi amb coordenades polars:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Aquest límit no existeix, ja que depèn del paràmetre θ.

11. Estudieu la continuïtat de les funcions

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2xy^2}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funció *f*(*x*,*y*) està definida a trossos, per a (*x*, *y*) ≠ (0,0) correspon la funció $\frac{x^3 + 2xy^2}{x^2 + y^2}$, que és contínua en tots els punts menys els que anul·len el denominador, però el punt (0,0) no pertany al domini de definició, així és contínua. Per a (*x*, *y*) = (0,0) és la funció constant 0, que sempre és contínua. Ara sols ens cal estudiar què passa al punt de tall. Vegem si el límit de la funció quan tendeix a (0,0) coincideix amb el valor *f*(0,0):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + 2xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cdot \cos^3\theta + 2 \cdot r \cdot \cos\theta \cdot r^2 \cdot \sin^2\theta}{r^2 \cdot \cos^2\theta + r^2 \cdot \sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cdot \cos^3\theta + 2 \cdot r^3 \cdot \cos\theta \cdot \sin^2\theta}{r^2 \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta)} =$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cdot \left(\cos^3\theta + 2 \cdot \cos\theta \cdot \sin^2\theta\right)}{r^2 \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \lim_{r\to 0} r \cdot \left(\cos^3\theta + 2 \cdot \cos\theta \cdot \sin^2\theta\right) = 0$$

$f(0,0) = 0$

Per tant, la funció *f*(*x*,*y*) és contínua en tots els seus punts de R^2.

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funció *f*(*x*,*y*) està definida a trossos, per a (*x*, *y*) ≠ (0,0) correspon la funció $\frac{4x^3}{x^2 + y^2}$, que és continua en tots els punts menys els que anul·len el denominador, però el punt (0,0) no pertany al domini de definició, així és contínua. Per a (*x*, *y*) = (0,0) és la funció constant 0 que sempre és contínua. Ara sols ens cal estudiar què passa al punt de tall. Vegem si el límit de la funció quan tendeix a (0,0) coincideix amb el valor $f(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} = \lim_{r\to 0} \frac{4\cdot r^3\cdot \cos^3\theta}{r^2\cdot\cos^2\theta + r^2\cdot\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{4\cdot r\cdot\cos^3\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} 4\cdot r\cdot\cos^3\theta = 0$$

$$f(0,0) = 0$$

Per tant, la funció $f(x,y)$ és contínua en tots els seus punts de R^2.

12. Calculeu el vector gradient i la matriu hessiana de les funcions següents als punts indicats:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 6xy - 2x + 4y + 3$ en $(1,-1)$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = (2x + 6y - 2\,,\, -2y + 6x + 4) \to \nabla f(1,-1) = (-6\,,12)$$

Busquem les derivades parcials segones:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -2$$

Per tant, la matriu hessiana serà la següent:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \to Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $f(x,y) = x^4 - y^2 + 2xy$ en $(-2,3)$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = (4x^3 + 2y\,,\, -2y + 2x) \to \nabla f(-2,3) = (-26\,,-10)$$

Busquem les derivades parcials segones:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 12x^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -2$$

Per tant, la matriu hessiana serà la següent:

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12x^2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad Hf(-2,3)=\begin{pmatrix}48 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

c) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en $(1,1)$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\left(\frac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\frac{-4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) \rightarrow \nabla f(1,1)=(1,-1)$$

Busquem les derivades parcials segones:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{-12x^2y^2+4y^4}{\left(x^2+y^2\right)^3} \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{8x^3y-8xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{-8x^3y+8xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^3} \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{12x^2y^2-4y^4}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

Per tant, la matriu hessiana serà la següent:

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-12x^2y^2+4y^4}{\left(x^2+y^2\right)^3} & \dfrac{8x^3y-8xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}\\ \dfrac{-8x^3y+8xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^3} & \dfrac{12x^2y^2-4y^4}{\left(x^2+y^2\right)^3}\end{pmatrix}$$

$$Hf(1,1)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

d) $f(x,y)=(x-y)\ln(xy)$ en $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\left(\ln(xy)+\frac{x-y}{x},-\ln(xy)+\frac{x-y}{y}\right)$$

$$\nabla f\left(2,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{4},3\right)$$

Busquem les derivades parcials segones:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{x+y}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}=\frac{x-y}{xy} \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}=\frac{x-y}{xy} \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{-x-y}{y^2}$$

Per tant, la matriu hessiana serà la següent:

$$Hf\left(2,\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x+y}{x^2} & \frac{x-y}{xy} \\ \frac{x-y}{xy} & \frac{-x-y}{y^2} \end{pmatrix} \rightarrow Hf\left(2,\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -10 \end{pmatrix}$$

13. Calculeu el gradient i la matriu hessiana de les funcions següents:

a) $f(x,y)=8xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\left(8y-\frac{1}{x^2},8x-\frac{1}{y^2}\right)$$

Busquem les derivades parcials segones:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{2}{x^3} \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}=8 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}=8 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{2}{y^3}$$

Per tant, la matriu hessiana serà la següent:

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 8 \\ 8 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

b) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}-x^2-ey^2$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\left(2xe^{x^2+y^2}-2x,2ye^{x^2+y^2}-2ey\right)$$

Busquem les derivades parcials segones:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = e^{x^2+y^2}(2+4x^2)-2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 4xye^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 4xye^{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = e^{x^2+y^2}(2+4y^2)-2e$$

Per tant, la matriu hessiana serà la següent:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x^2+y^2}(2+4x^2)-2 & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2}(2+4y^2)-2e \end{pmatrix}$$

c) $f(x,y,z) = xye^{yz}$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right) = \left(ye^{yz}, xe^{yz}(1+yz), xy^2e^{yz}\right)$$

Busquem les derivades parcials segones:

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} = e^{yz}(1+yz) \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z} = y^2e^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x} = e^{yz}(1+yz) \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = xze^{yz}(yz+2) \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} = xye^{yz}(yz+2)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial x} = y^2e^{yz} \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial y} = xye^{yz}(2+yz) \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = xy^3e^{yz}$$

Per tant, la matriu hessiana serà la següent:

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{yz}(1+yz) & y^2e^{yz} \\ e^{yz}(1+yz) & xze^{yz}(yz+2) & xye^{yz}(yz+2) \\ y^2e^{yz} & xye^{yz}(2+yz) & xy^3e^{yz} \end{pmatrix}$$

d) $f(x,y,z)=z\ \ln(x^2+y^2)$

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)=\left(\frac{2xz}{x^2+y^2},\frac{2yz}{x^2+y^2},\ln(x^2+y^2)\right)$$

Busquem les derivades parcials segones:

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}=\frac{-2x^2z+2y^2z}{(x^2+y^2)^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial y}=\frac{-4xyz}{(x^2+y^2)^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial z}=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial x}=\frac{-4xyz}{(x^2+y^2)^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{-2y^2z+2zx^2}{(x^2+y^2)^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial z}=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}=0$$

Per tant, la matriu hessiana serà la següent:

$$Hf(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2x^2z+2y^2z}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-4xyz}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2x}{x^2+y^2}\\ \frac{-4xyz}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2y^2z+2zx^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2y}{x^2+y^2}\\ \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} & 0\end{pmatrix}$$

e) $f(x,y,z)=\ln\left(\frac{xy}{y+z}\right)$

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)=\left(\frac{1}{x},\frac{z}{y(y+z)},\frac{-1}{y+z}\right)$$

Busquem les derivades parcials segones:

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial y}=0\quad,\quad\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial z}=0$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial x}=0\,,\quad\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{-2y+z}{y^2(y+z)^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial z}=\frac{1}{(y+z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial x}=0\quad,\quad\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial y}=\frac{1}{(y+z)^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}=\frac{1}{(y+z)^2}$$

Per tant, la matriu hessiana serà la següent:

$$Hf(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2y+z}{y^2(y+z)^2} & \frac{1}{(y+z)^2} \\ 0 & \frac{1}{(y+z)^2} & \frac{1}{(y+z)^2} \end{pmatrix}$$

14. Determineu el domini de les funcions següents:

a) $f(x,y)=\left(\frac{x}{y}, x-3x^2y, \ln(x^2+y)\right)$

Per tant, tenim que:

$$f_1=\frac{x}{y} \qquad f_2=x-3x^2y \qquad f_3=\ln(x^2+y)$$

$$\left.\begin{array}{l} Dom\ f_1=\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \mid y\neq 0\} \\ Dom\ f_2=\mathrm{R}^2 \\ Dom\ f_3=\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \mid x^2+y>0\} \end{array}\right\} \quad Dom\ f=Dom\ f_1\cap Dom\ f_2\cap Dom\ f_3$$

Llavors, $Dom\ f=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y>0\ ,\ y\neq 0\}$

b) $f(x,y)=\left(\frac{1}{x-y}, \frac{y}{x+y}\right)$

Per tant, tenim que:

$$f_1=\frac{1}{x-y} \qquad f_2=\frac{y}{x+y}$$

$$\left.\begin{array}{l} Dom\ f_1=\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \mid y\neq x\} \\ Dom\ f_2=\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \mid y\neq -x\} \end{array}\right\} \quad Dom\ f=Dom\ f_1\cap Dom\ f_2$$

Llavors, $Dom\ f=\{(x,y)\in R^2 \mid y\neq \pm x\}$

c) $f(x,y)=\left(\frac{\sqrt{x}}{x+y}, \ln(x+y)\right)$

Per tant, tenim que:

$$f_1 = \frac{\sqrt{x}}{x+y} \qquad f_2 = \ln(x+y)$$

$$\left.\begin{array}{l} Dom\ f_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \neq -x,\ x \geq 0\} \\ Dom\ f_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y > -x\} \end{array}\right\} \qquad Dom\ f = Dom\ f_1 \cap Dom\ f_2$$

Llavors, $Dom\ f = \{(x,y)\in R^2 \mid y > -x, x \geq 0\}$

Calculeu les matrius jacobianes d'aquestes funcions:

a) $f(x,y) = \left(\frac{x}{y}, x - 3x^2 y, \ln(x^2+y)\right)$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x,y) \\ \nabla f_2(x,y) \\ \nabla f_3(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_3(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ 1-6xy & -3x^2 \\ \frac{2x}{x^2+y} & \frac{1}{x^2+y} \end{pmatrix}$$

b) $f(x,y) = \left(\frac{1}{x-y}, \frac{y}{x+y}\right)$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x,y) \\ \nabla f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x-y)^2} & -\frac{1}{(x-y)^2} \\ -\frac{y}{(x+y)^2} & \frac{x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

c) $f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x+y}, \ln(x+y)\right)$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x,y) \\ \nabla f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x+y}{(x+y)^2\cdot\sqrt{x}} & -\frac{\sqrt{x}}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{x+y} & \frac{1}{x+y} \end{pmatrix}$$

15. Donada $z = y\ln(x^2-y^2)$, proveu que $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y\ln(x^2-y^2)}{y^2} \quad \to \frac{1}{x}\cdot\frac{2xy}{x^2-y^2} + \frac{1}{y}\cdot\left(\ln(x^2-y^2) - \frac{2y^2}{x^2-y^2}\right) = \frac{\ln(x^2-y^2)}{y}$$

$$\frac{2xy^2 + x(x^2 - y^2)\left(\ln(x^2 - y^2)\right) - 2xy^2}{xy(x^2 - y^2)} = \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} \rightarrow$$

$$\frac{x(x^2 - y^2)\ln(x^2 - y^2)}{xy(x^2 - y^2)} = \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} \rightarrow \quad \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} = \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y}$$

16. Donada $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, calculeu l'elasticitat parcial respecte x en (2,2,4).

$$E_x f(2,2,4) = \frac{\partial f(2,2,4)}{\partial x} \cdot \frac{2}{f(2,2,4)} = \frac{2^3 \cdot 4 + 2 \cdot 4^3}{\sqrt{(2^2 + 2^2 + 4^2)^3}} \cdot \frac{2}{\frac{16}{\sqrt{24}}} = \frac{160}{\sqrt{24^3}} \cdot \frac{2\sqrt{24}}{16} = \frac{5}{6}$$

essent $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \dfrac{y^3 z + yz^3}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$

17. Calculeu l'elasticitat parcial respecte a z de la funció $f(x,y,z) = (x+z)e^{(y^2+3z)}$ en el punt (2,0,−1).

$$E_z f(2,0,-1) = \frac{\partial f(2,0,-1)}{\partial z} \cdot \frac{-1}{f(2,0,-1)} = 4e^{-3} \cdot \frac{-1}{e^{-3}} = -4$$

essent $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = (3x + 3z + 1)e^{(y^2+3z)}$

18. Calculeu l'elasticitat parcial respecte a y de la funció $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right)$ en el punt (2,1).

$$E_y f(2,1) = \frac{\partial f(2,1)}{\partial y} \cdot \frac{1}{f(2,1)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{3}{5\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \approx -0{,}65481$$

essent $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{x^2 - y^2}{y(x^2 + y^2)}$

19. Calculeu l'elasticitat parcial respecte z de la funció $f(x,y,z) = xye^{2z}$ en el punt (1,2,3).

$$E_z f(1,2,3) = \frac{\partial f(1,2,3)}{\partial z} \cdot \frac{3}{f(1,2,3)} = 4e^6 \cdot \frac{3}{2e^6} = 6$$

essent $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2xye^{2z}$

Exercicis del tema 3:
Optimització sense restriccions

20. Trobeu els òptims de:

a) $f(x,y) = x^3 + x^2 y + y^2 + 2y + 1$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 2xy \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + 2y + 2$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy = 0 \\ x^2 + 2y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2xy = 0 \\ y = \dfrac{-x^2 - 2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x\left(\dfrac{-x^2 - 2}{2}\right) = 0 \\ y = \dfrac{-x^2 - 2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - x^3 - 2x = 0 \\ y = \dfrac{-x^2 - 2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x^3 + 3x^2 - 2x = 0 \\ y = \dfrac{-x^2 - 2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(-x^2 + 3x - 2) = 0 \\ y = \dfrac{-x^2 - 2}{2} \end{cases}$$

si $x = 0$, llavors: $y = \dfrac{-0^2 - 2}{2} = -1$

si $-x^2+3x-2 = 0$, llavors: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-2^2 - 2}{2} = -3 \\ y = \dfrac{-1^2 - 2}{2} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Punts crítics: $(0, -1)$, $(2, -3)$ i $\left(1, -\dfrac{3}{2}\right)$

Busquem la matriu hessiana: (Condició necessària de segon ordre)

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x+2y & 2x\\ 2x & 2\end{pmatrix}$$

$Hf(0,-1)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \rightarrow Hf(0,-1)$ és indefinida $\rightarrow (0,-1)$ punt de sella

$Hf(2,-3)=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix} \rightarrow Hf(2,-3)$ és indefinida $\rightarrow (2,-3)$ punt de sella

$Hf\left(1,-\frac{3}{2}\right)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} \rightarrow Hf\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ és definida positiva $\rightarrow \left(1,-\frac{3}{2}\right)$ mínim local

b) $f(x,y)=y^4+4x^2-4xy$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=8x-4y \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=4y^3-4x$$

$$\begin{cases}8x-4y=0\\ 4y^3-4x=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=2x\\ 4y^3-4x=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=2x\\ 4\cdot(2x)^3-4x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2x\\ 32x^3-4x=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=2x\\ x(32x^2-4)=0\end{cases}$$

si $x=0$ llavors $y=2\cdot 0=0$

si $32x-4=0$ llavors $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{\sqrt{8}}\\ x_2=-\dfrac{1}{\sqrt{8}}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y_1=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{8}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ y=2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$

Punts crítics: $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{8}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ i $\left(-\frac{1}{\sqrt{8}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Busquem la matriu hessiana: (Condició necessària de segon ordre)

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Hf(0,0) \text{ és indefinida} \rightarrow (0,0) \text{ punt de sella}$$

$$Hf\left(\frac{1}{\sqrt{8}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow Hf\left(\frac{1}{\sqrt{8}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ és definida positiva} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{8}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

mínim local

$$Hf\left(-\frac{1}{\sqrt{8}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow Hf\left(-\frac{1}{\sqrt{8}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ és definida positiva} \rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{8}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

mínim local

c) $f(x,y)=x+y+xy-2\ln(x)-2\ln(y)$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=1+y-\frac{2}{x} \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=1+x-\frac{2}{y}$$

$$\begin{cases} 1+y-\dfrac{2}{x}=0 \\ 1+x-\dfrac{2}{y}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+xy-2=0 \\ y+xy-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(1+y)=+2 \\ y+xy-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{1+y} \\ y+\dfrac{2y}{1+y}-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{1+y} \\ y(1+y)+2y-2(1+y)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{1+y} \\ y^2+y-2=0 \end{cases}$$

Per tant, $y^2+y-2=0 \rightarrow \begin{cases} y_1=1 \\ y_2=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{1+1}=1 \\ x=\dfrac{2}{1-2}=-2 \end{cases}$

Punt crític: (1, 1), ja que el (−2, −2) no pertany al domini de la funció.
Busquem la matriu hessiana: (Condició necessària de segon ordre)

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^2} & 1 \\ 1 & \dfrac{2}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$Hf(1,1)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Hf(1,1)$$ és definida positiva → (1, 1) mínim local

d) $f(x,y)=3xy-(x^3+y^3)$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3y-3x^2 \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x-3y^2$$

$$\begin{cases} 3y-3x^2=0 \\ 3x-3y^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ 3x-3y^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ 3x-3x^4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ 3x\cdot(1-x^3)=0 \end{cases}$$

si $3x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0^2 = 0$
si $1-x^3 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 1^2 = 1$

Punts crítics: (0, 0) i (1, 1)
Busquem la matriu hessiana: (Condició necessària de segon ordre)

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Hf(0,0)$$ és indefinida → (0, 0) punt de sella

$$Hf(1,1)=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow Hf(1,1)$$ és definida negativa → (1, 1) màxim local

e) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6xy - 12$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ x = \dfrac{2}{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\dfrac{4}{y^2} + 3y^2 - 15 = 0 \\ x = \dfrac{2}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12 + 3y^4 - 15y^2 = 0 \\ x = \dfrac{2}{y} \end{cases}$$

Per tant, $3y^4 - 15y^2 + 12 = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = 2 \\ y_4 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{1} = 2 \\ x_2 = \dfrac{2}{-1} = -2 \\ x_3 = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_4 = \dfrac{2}{-2} = -1 \end{cases}$

Punts crítics: (1, 2), (–1, –2), (2, 1) i (–2, –1).
Busquem la matriu hessiana: (Condició necessària de segon ordre)

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

$Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow Hf(1,2)$ és indefinida → (1, 2) punt de sella

$Hf(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow Hf(-1,-2)$ és indefinida → (–1, –2) punt de sella

$Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow Hf(2,1)$ és definida positiva → (2, 1) mínim local

$Hf(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow Hf(-2,-1)$ és definida negativa → (–2, –1) màxim local *f)* $f(x,y) = xye^{x+2y}$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (xy+y)e^{x+2y} \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (2xy+x)e^{x+2y}$$

$$\begin{cases} (xy+y)e^{x+2y} = 0 \\ (2xy+x)e^{x+2y} = 0 \end{cases} \underset{(1)}{\rightarrow} \begin{cases} xy+y=0 \\ 2xy+x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(x+1)=0 \\ 2xy+x=0 \end{cases}$$

Per tant, $y(x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x\cdot 0+x=0 \\ -2y-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

(1) La funció exponencial és sempre positiva i mai s'anul·la.

Punts crítics: (0, 0) i $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

Busquem la matriu hessiana: (Condició necessària de segon ordre)

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (xy+2y)e^{x+2y} & (2xy+x+2y+1)e^{x+2y} \\ (2xy+x+2y+1)e^{x+2y} & (4xy+4x)e^{x+2y} \end{pmatrix}$$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Hf(0,0)$ és indefinida → (0, 0) punt de sella

$Hf\left(-1,-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2e^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{e^2} \end{pmatrix} \rightarrow Hf(-1,-\frac{1}{2})$ és definida negativa $\rightarrow \left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ màxim local

g) $f(x,y) = 4x^2 - 3xy + 9y^2 + 5x + 15y + 16$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 8x - 3y + 5 \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -3x + 18y + 15$$

$$\begin{cases} 8x-3y+5=0 \\ -3x+18y+15=0 \end{cases} \underset{(1)}{\rightarrow} \begin{cases} 24x-9y+15=0 \\ -24x+144y+120=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

(1) Apliquem el mètode de resolució de sistemes d'equacions per reducció. Però, també es pot utilitzar qualsevol dels altres dos: igualació o substitució.

Punt crític: $(-1,-1)$.

Busquem la matriu hessiana: (Condició necessària de segon ordre)

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -3\\ -3 & 18\end{pmatrix}$$

$$Hf(-1,-1)=\begin{pmatrix}8 & -3\\ -3 & 18\end{pmatrix}\rightarrow Hf(-1,-1) \text{ és definida positiva} \rightarrow (-1,-1) \text{mínim local}$$

21. Una empresa produeix dos tipus de calculadores, on x i y són les unitats produïdes de cada tipus en un any (en milers). Les funcions de costos i ingressos per any són (en milions), $C(x,y)=x^2-2xy+2y^2+6x-9y+5$ i $I(x,y)=2x+3y$, respectivament. Quantes calculadores de cada tipus s'han de produir per any per obtenir un benefici màxim? Quin és aquest benefici?

Busquem la funció de beneficis:

$$B(x,y)=I(x,y)-C(x,y)=2x+3y-x^2+2xy-2y^2-6x+9y-5=-x^2+2xy-2y^2-4x+12y-5$$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero:

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}=-2x+2y-4 \quad , \quad \frac{\partial B(x,y)}{\partial y}=-4y+2x+12$$

$$\begin{cases}-2x+2y-4=0\\ -4y+2x+12=0\end{cases}\xrightarrow[(1)]{}\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$$

(1) Apliquem el mètode de resolució de sistemes d'equacions per reducció. Però, també es pot utilitzar qualsevol dels altres dos: igualació o substitució.

Comprovem que aquest punt es tracta d'un màxim:

$$HB(x,y)=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\rightarrow HB(2,4)=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$$

Utilitzant el mètode dels menors principals (també es pot usar el mètode dels valors propis):

$$|HB(2,4)_1| = -2 \qquad |HB(2,4)_2| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4$$

Per tant, la matriu és definida negativa i, llavors, (2,4) es tracta d'un màxim.
Vegem quin és aquest benefici màxim:
$B(2,4) = -2^2 + 2\cdot 2\cdot 4 - 2\cdot 4^2 - 4\cdot 2 + 12\cdot 4 - 5 = 15$ milions en un any

22. Una empresa produeix tres béns de preus de mercat 16, 12 i 20 unitats monetàries, respectivament. La seva funció de costos és: $C(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 25$ on *x*, *y*, *z* representen les quantitats produïdes de cadascun dels tres béns. Obtingueu els valors de *x*, *y*, *z* que maximitzen el benefici de l'empresa.

Dades: $p_1 = 16$, $p_2 = 12$ i $p_3 = 20$
Llavors, la funció d'ingressos és la següent:

$$I(x,y,z) = 16x + 12y + 20z$$

Busquem la funció de beneficis:

$$B(x,y,z) = I(x,y,z) - C(x,y,z) = 16x + 12y + 20z - x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 2xz - 25$$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero:

$$\frac{\partial B(x,y,z)}{\partial x} = 16 - 2x - 2z \quad , \quad \frac{\partial B(x,y,z)}{\partial y} = 12 - 4y \quad , \quad \frac{\partial B(x,y,z)}{\partial z} = 20 - 6z - 2x$$

$$\begin{cases} 16 - 2x - 2z = 0 \\ 12 - 4y = 0 \\ 20 - 6z - 2x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 16 - 2x - 2z = 0 \\ y = 3 \\ 20 - 6z - 2x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 16 - 2x - 2z = 0 \\ y = 3 \\ 20 - 6z - 2x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Comprovem que aquest punt es tracta d'un màxim:

$$HB(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \to \quad HB(7,3,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Utilitzant el mètode dels menors principals (també es pot usar el mètode dels valors propis):

$$\left|HB(7,3,1)_1\right| = -2 \quad , \quad \left|HB(7,3,1)_2\right| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 \quad , \quad \left|HB(7,3,1)_3\right| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -32$$

Per tant, la matriu és definida negativa i, llavors, (7,3,1) es tracta d'un màxim.

23. Una empresa produeix dos béns en competència perfecta, els preus dels quals són $p_1 = 42$ i $p_2 = 51$. La funció de costos és $C(q_1,q_2) = 1{,}5q_1^2 + 3q_1q_2 + 2q_2^2 + 34{,}5$, on q_1 i q_2 són les unitats produïdes d'aquests béns. Calculeu els nivells de producció que proporcionen el benefici màxim.

Dades: $p_1 = 42$ i $p_2 = 51$

Llavors, la funció d'ingressos és la següent:

$$I(q_1,q_2) = 42q_1 + 51q_2$$

Busquem la funció de beneficis:

$$B(q_1,q_2) = I(q_1,q_2) - C(q_1,q_2) = 42q_1 + 51q_2 - 1{,}5q_1^2 - 3q_1q_2 - 2q_2^2 - 34{,}5$$

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero:

$$\frac{\partial B(q_1,q_2)}{\partial q_1} = 42 - 3q_1 - 3q_2 \quad , \quad \frac{\partial B(q_1,q_2)}{\partial q_2} = 51 - 3q_1 - 4q_2$$

$$\begin{cases} 42 - 3q_1 - 3q_2 = 0 \\ 51 - 3q_1 - 4q_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow[(1)]{} \begin{cases} q_1 = 5 \\ q_2 = 9 \end{cases}$$

(1) Apliquem el mètode de resolució de sistemes d'equació per reduccions. Però, també es pot utilitzar qualsevol dels altres dos: igualació o substitució.

Comprovem que aquest punt es tracta d'un màxim:

$$HB(x,y) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad HB(5,9) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Utilitzant el mètode dels menors principals (també es pot usar el mètode dels valors propis):

$$\left|HB(5,9)_1\right| = -3 \quad , \quad \left|HB(5,9)_2\right| = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 3$$

Per tant, la matriu és definida negativa i, llavors, (5,9) es tracta d'un màxim.

24. La funció de beneficis mensuals de l'empresa BLA, dedicada a la fabricació i comercialització de telèfons mòbils, és:

$$B(x,y,z) = 6xz + 18y + yz - 3x^2z - y^2 - z^2$$

(en milers d'euros), on *x*, *y*, *z* són milers de telèfons produïts mensualment dels models BLAline, BLAstar i BLAstel, respectivament. Determineu el nombre de telèfons de cada model que s'han de produir mensualment per tal de maximitzar el benefici.

Busquem les derivades parcials i les igualem a zero:

$$\frac{\partial B(x,y,z)}{\partial x} = 6z - 6xz \quad , \quad \frac{\partial B(x,y,z)}{\partial y} = 18 + z - 2y \quad , \quad \frac{\partial B(x,y,z)}{\partial z} = 6x + y - 3x^2 - 2z$$

$$\begin{cases} 6z - 6xz = 0 \\ 18 + z - 2y = 0 \\ 6x + y - 3x^2 - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6z \cdot (1 - x) = 0 \\ 18 + z - 2y = 0 \\ 6x + y - 3x^2 - 2z = 0 \end{cases}$$

Nota: Aquest sistema no és lineal.

Per tant:

$$6z \cdot (1 - x) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 6z = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

si $z = 0$

$$\begin{cases} 18 - 2y = 0 \\ 6x + y - 3x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ 6x + y - 3x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ 6x + 9 - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

$-3x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow x_1 = -1$ (no podem tenir una quantitat negativa), $x_2 = 3$

Per tant, per a aquest cas tenim el punt (3,9,0)

si $x = 1$

$$\begin{cases} 18 + z - 2y = 0 \\ 6 + y - 3 - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 18 + z - 2y = 0 \\ 3 - 2z + y = 0 \end{cases} \underset{(1)}{\rightarrow} \begin{cases} y = 13 \\ z = 8 \end{cases}$$

(1) Apliquem el mètode de resolució de sistemes d'equacions per reducció. Però, també es pot utilitzar qualsevol dels altres dos: igualació o substitució.

Per tant, per a aquest cas tenim el punt (1,13,8).

Comprovem que aquests punts són màxims:

$$HB(x,y,z)=\begin{pmatrix}-6z & 0 & 6-6x\\ 0 & -2 & 1\\ 6-6x & 1 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}HB(3,9,0)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -12\\ 0 & -2 & 1\\ -12 & 1 & -2\end{pmatrix}\\ HB(1,13,8)=\begin{pmatrix}-48 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\end{cases}$$

Utilitzant el mètode dels menors principals (també es pot usar el mètode dels valors propis):

$$HB(3,9,0)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -12\\ 0 & -2 & 1\\ -12 & 1 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\quad |HB(3,9,0)_1|=0\quad,\quad |HB(3,9,0)_2|=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=0$$

$$|HB(3,9,0)_3|=\begin{vmatrix}0 & 0 & -12\\ 0 & -2 & 1\\ -12 & 1 & -2\end{vmatrix}=288$$

Per tant, la matriu és indefinida i, llavors, (3,9,0) no és un màxim.

$$HB(1,13,8)=\begin{pmatrix}-48 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\quad |HB(1,13,8)_1|=-48\quad,\quad |HB(1,13,8)_2|=\begin{vmatrix}-48 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=96$$

$$|HB(1,13,8)_3|=\begin{vmatrix}-48 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=-144$$

Per tant, la matriu és definida negativa i, llavors, (1,13,8) és un màxim. En conclusió, s'han de produir 1 telèfon BLAline, 13 telèfons BLAstar, 8 telèfons BLAstel (en milers).

Exercicis del tema 4: Optimització amb restriccions d'igualtat

25. Determineu els òptims dels problemes següents:

a) $f(x,y) = x + y \qquad s.a. \quad x^2 + y^2 = 1$

$$L(x,y,\lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1) = x + y - \lambda x^2 - \lambda y^2 + \lambda$$

$$\nabla L(x,y,\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda x = 2\lambda y \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ -x^2 - x^2 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Per a $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 1 - 2\lambda \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; llavors,

punt crític $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ amb $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Per a $x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y=x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 1+2\lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=0 \rightarrow \lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; llavors,

punt crític $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ amb $\lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Calculem la matriu hessiana de la funció lagrangiana:

$$HL_{(x,y)}(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}-2\lambda & 0\\ 0 & -2\lambda\end{pmatrix}$$

$$HL_{(x,y)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 0\\ 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix} \rightarrow \textit{def. negativa} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

màxim restringit

$$HL_{(x,y)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix} \rightarrow \textit{def. positiva} \rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

mínim restringit

b) $f(x,y)=6-4x-3y \qquad s.a. \quad x^2+y^2=1$

$$L(x,y,\lambda)=6-4x-3y-\lambda(x^2+y^2-1)=6-4x-3y-\lambda x^2-\lambda y^2+\lambda$$

$$\nabla L(x,y,\lambda)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}=0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}-4-2\lambda x=0\\ -3-2\lambda y=0\\ -x^2-y^2+1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4-2\lambda x=0\\ -3-2\lambda y=0\\ -x^2-y^2+1=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{2}{\lambda}\\ y=-\dfrac{3}{2\lambda}\\ -x^2-y^2+1=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{2}{\lambda}\\ y=-\dfrac{3}{2\lambda}\\ -\left(-\dfrac{2}{\lambda}\right)^2-\left(-\dfrac{3}{2\lambda}\right)^2+1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-\dfrac{2}{\lambda}\\ y=-\dfrac{3}{2\lambda}\\ -\dfrac{4}{\lambda^2}-\dfrac{9}{4\lambda^2}+1=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{2}{\lambda}\\ y=-\dfrac{3}{2\lambda}\\ -16-9+4\lambda^2=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{2}{\lambda}\\ y=-\dfrac{3}{2\lambda}\\ -16-9+4\lambda^2=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{2}{\lambda}\\ y=-\dfrac{3}{2\lambda}\\ \lambda=\pm\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\pm\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

Per a $\lambda = \frac{5}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \end{cases}$; llavors, punt crític $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ amb $\lambda = \frac{5}{2}$.

Per a $\lambda = -\frac{5}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$; llavors, punt crític $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ amb $\lambda = -\frac{5}{2}$.

Calculem la matriu hessiana de la funció lagrangiana:

$$HL_{(x,y)}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

$$HL_{(x,y)}\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{def. negativa} \rightarrow \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right) \textit{ màxim restringit}$$

$$HL_{(x,y)}\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{5}{2}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{def. positiva} \rightarrow \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{5}{2}\right) \textit{ mínim restringit}$$

c) $f(x,y,z,v,w) = x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + w^2 \qquad s.a. \quad \{x + y + z = 1 \quad , \quad v + w = 2\}$

$$L(x,y,z,v,w,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + w^2 - \lambda_1(x + y + z - 1) - \lambda_2(v + w - 2) =$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + w^2 - \lambda_1 x - \lambda_1 y - \lambda_1 z + \lambda_1 - \lambda_2 v - \lambda_2 w + \lambda_2 2)$$

$$\nabla L(x,y,z,v,w,\lambda_1,\lambda_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial L(x,y,z,v,w,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L(x,y,z,v,w,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L(x,y,z,v,w,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L(x,y,z,v,w,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial v} = 0 \\ \frac{\partial L(x,y,z,v,w,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial w} = 0 \\ \frac{\partial L(x,y,z,v,w,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \frac{\partial L(x,y,z,v,w,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - \lambda_1 = 0 \\ 2y - \lambda_1 = 0 \\ 2z - \lambda_1 = 0 \\ 2v - \lambda_2 = 0 \\ 2w - \lambda_2 = 0 \\ -x - y - z + 1 = 0 \\ -v - w + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-\lambda_1=0 \\ 2y-\lambda_1=0 \\ 2z-\lambda_1=0 \\ 2v-\lambda_2=0 \\ 2w-\lambda_2=0 \\ -x-y-z+1=0 \\ -v-w+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\lambda_1}{2} \\ y=\dfrac{\lambda_1}{2} \\ z=\dfrac{\lambda_1}{2} \\ v=\dfrac{\lambda_2}{2} \\ w=\dfrac{\lambda_2}{2} \\ -x-y-z+1=0 \\ -v-w+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\lambda_1}{2} \\ y=\dfrac{\lambda_1}{2} \\ z=\dfrac{\lambda_1}{2} \\ v=\dfrac{\lambda_2}{2} \\ w=\dfrac{\lambda_2}{2} \\ -\dfrac{3\lambda_1}{2}+1=0 \\ -\lambda_2+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \\ z=\dfrac{1}{3} \\ v=1 \\ w=1 \\ \lambda_1=\dfrac{2}{3} \\ \lambda_2=2 \end{cases}$$

punt crític $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,1\right)$ amb $\lambda_1=\frac{2}{3}$ i $\lambda_2=2$.

Calculem la matriu hessiana de la funció lagrangiana:

$$HL_{(x,y,z,v,w)}(x,y,z,v,w,\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix} 2&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$$

$$HL_{(x,y,z,v,w)}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,1,\frac{2}{3},2\right)=\begin{pmatrix} 2&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{def. positiva} \rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,1,\frac{2}{3},2\right)}_{\textit{mínim restringit}}$$

d) $f(x,y,z)=xy+xz+yz \qquad \text{s.a.} \quad \{x+y+z=6 \quad , \quad x-y=1\}$

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=xy+xz+yz-\lambda_1(x+y+z-6)-\lambda_2(x-y-1)=$$
$$=xy+xz+yz-\lambda_1x-\lambda_1y-\lambda_1z+\lambda_1 6-\lambda_2x+\lambda_2y+\lambda_2$$

$$\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2}=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y+z-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x+z-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ x+y-\lambda_1=0 \\ -x-y-z+6=0 \\ -x+y+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x+z-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ x+y-\lambda_1=0 \\ -x-y-z+6=0 \\ -x+y+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x+z-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ x+y-\lambda_1=0 \\ -x-y-z+6=0 \\ y=x-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1+z-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x+z-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ x+x-1-\lambda_1=0 \\ -x-x+1-z+6=0 \\ y=x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1+z-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x+z-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ 2x-1-\lambda_1=0 \\ -2x-z+7=0 \\ y=x-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1+z-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ x+z-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1=2x-1 \\ z=-2x+7 \\ y=x-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1-2x+7-2x+1-\lambda_2=0 \\ x-2x+7-2x+1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1=2x-1 \\ z=-2x+7 \\ y=x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x+7-\lambda_2=0 \\ -3x+8+\lambda_2=0 \\ \lambda_1=2x-1 \\ z=-2x+7 \\ y=x-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_2=-3x+7 \\ -3x+8+\lambda_2=0 \\ \lambda_1=2x-1 \\ z=-2x+7 \\ y=x-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_2=-3x+7 \\ -3x+8-3x+7=0 \\ \lambda_1=2x-1 \\ z=-2x+7 \\ y=x-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_2=-3x+7 \\ x=\dfrac{5}{2} \\ \lambda_1=2x-1 \\ z=-2x+7 \\ y=x-1 \end{cases}$$

Punt crític $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},2\right)$ amb $\lambda_1=4$ i $\lambda_2=-\frac{1}{2}$

Calculem la matriu hessiana de la funció lagrangiana:

$$HL_{(x,y,z)}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$HL_{(x,y,z)}\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},2,4,-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\rightarrow \textit{indefinida}$$

Per tant, mirem què passa sobre les direccions factibles:

$$Jg\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},2\right)\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases}a+b+c=0\\a-b=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}c=-2b\\a=b\end{cases}$$

Llavors, $\Delta v=(b,b,-2b)$. Per tant, mirem què passa

$$(b,b,-2b)\cdot HL_{(x,y,z)}\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},2,4,-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}b\\b\\-2b\end{pmatrix}$$

$$(b,b,-2b)\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b\\b\\-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b&-b&2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\b\\-2b\end{pmatrix}=-b^2-b^2-4b^2=-6b^2<0$$

Atès que és negativa, el punt $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},2\right)$ és un màxim restringit.

e) $f(x,y,z)=x+y+z \qquad s.a. \quad \{xy+xz+yz=75\}$

$$L(x,y,z,\lambda)=x+y+z-\lambda(xy+xz+yz-75)=x+y+z-\lambda xy-\lambda xz-\lambda yz+\lambda 75$$

$$\nabla L(x,y,z,\lambda)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial x}=0\\[2mm]\dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial y}=0\\[2mm]\dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial z}=0\\[2mm]\dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial \lambda}=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}1-\lambda y-\lambda z=0\\1-\lambda x-\lambda z=0\\1-\lambda x-\lambda y=0\\-xy-xz-yz+75=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}1-\lambda y-\lambda z=0\\1-\lambda x-\lambda z=0\\1-\lambda x-\lambda y=0\\-xy-xz-yz+75=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1-\lambda y-\lambda z=0\\1-\lambda x-\lambda z=0\\1-\lambda x-\lambda y=0\\-xy-xz-yz+75=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{1-\lambda y}{\lambda}\\1-\lambda x-\lambda z=0\\x=\dfrac{1-\lambda y}{\lambda}\\-xy-xz-yz+75=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{1-\lambda y}{\lambda} \\ 1-(1-\lambda y)-(1-\lambda y)=0 \\ x=\dfrac{1-\lambda y}{\lambda} \\ -xy-xz-yz+75=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1-\lambda y}{\lambda} \\ 2\lambda y-1=0 \\ x=\dfrac{1-\lambda y}{\lambda} \\ -xy-xz-yz+75=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1-\lambda y}{\lambda} \\ y=\dfrac{1}{2\lambda} \\ x=\dfrac{1-\lambda y}{\lambda} \\ -xy-xz-yz+75=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{2\lambda} \\ y=\dfrac{1}{2\lambda} \\ x=\dfrac{1}{2\lambda} \\ -\dfrac{1}{4\lambda^2}-\dfrac{1}{4\lambda^2}-\dfrac{1}{4\lambda^2}+75=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1}{2\lambda} \\ y=\dfrac{1}{2\lambda} \\ x=\dfrac{1}{2\lambda} \\ -3+300\lambda^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1}{2\lambda} \\ y=\dfrac{1}{2\lambda} \\ x=\dfrac{1}{2\lambda} \\ \lambda=\pm\sqrt{\dfrac{1}{100}}=\pm\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

per a $\lambda=\dfrac{1}{10}$ punt crític $(5, 5, 5)$.

per a $\lambda=-\dfrac{1}{10}$ punt crític $(-5, -5, -5)$.

Calculem la matriu hessiana de la funció lagrangiana:

$$HL_{(x,y,z)}(x,y,z,\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 0 & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$HL_{(x,y,z)}\left(5,5,5,\frac{1}{10}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{10} & -\dfrac{1}{10} \\ -\dfrac{1}{10} & 0 & -\dfrac{1}{10} \\ -\dfrac{1}{10} & -\dfrac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{indefinida}$$

$$HL_{(x,y,z)}\left(-5,-5,-5,-\frac{1}{10}\right)=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{10} & 0 & \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{indefinida}$$

Per tant, mirem què passa sobre les direccions factibles:

$$Jg(x,y,z) = \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}$$

Per al punt crític (5, 5, 5) amb $\lambda = \frac{1}{10}$:

$$Jg(5,5,5)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 10a + 10b + 10c = 0 \rightarrow \quad a = -b - c$$

Llavors, $\Delta v = (-b-c, b, c)$. Per tant, mirem què passa

$$(-b-c,b,c)\cdot HL_{(x,y,z)}\left(5,5,5,\frac{1}{10}\right)\begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$(-b-c,b,c)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}(b+c) & \frac{1}{10}b & \frac{1}{10}c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{10}b^2 - \frac{1}{5}bc - \frac{1}{10}c^2 + \frac{1}{10}b^2 + \frac{1}{10}c^2 = \frac{1}{5}(b^2 + c^2 + bc) > 0$$

Atès que és positiva, el punt (5, 5, 5) és un mínim restringit.

Per al punt crític (–5, –5, –5) amb $\lambda = -\frac{1}{10}$:

$$Jg(-5,-5,-5)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -10 & -10 & -10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad -10a - 10b - 10c = 0 \rightarrow$$

$$a = -b - c$$

Llavors, $\Delta v = (-b-c, b, c)$. Per tant, mirem què passa:

$$(-b-c,b,c)\cdot HL_{(x,y,z)}\left(-5,-5,-5,-\frac{1}{10}\right)\begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$(-b-c,b,c)\cdot\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10}\\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-b-c\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}(b+c) & -\frac{1}{10}b & -\frac{1}{10}c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b-c\\ b\\ c\end{pmatrix}=$$
$$=-\frac{1}{10}b^2-\frac{1}{5}bc-\frac{1}{10}c^2-\frac{1}{10}b^2-\frac{1}{10}c^2=-\frac{1}{5}(b^2+c^2+bc)<0$$

Atès que és negativa, el punt $(-5, -5, -5)$ és un màxim restringit.

26. Un taller utilitza en la seva producció tres tipus d'inputs amb quantitats *x, y, z*. S'estima que la funció de costos es dóna per

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+zx$$

i que la tecnologia aplicada implica la utilització d'aquests inputs en la quantitat total de 25 unitats físiques. A més, s'ha de complir la relació:

$$2x-3z=10$$

Quines quantitats de cada input s'utilitzaran per minimitzar el cost?

$$Opt.\quad f(x,y,z)=x^2+y^2+zx$$
$$s.a.\begin{cases}x+y+z=25\\ 2x-3z=10\end{cases}$$

Busquem la funció lagrangiana:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+zx-\lambda_1(x+y+z-25)-\lambda_2(2x-3z-10)=$$
$$=x^2+y^2+zx-\lambda_1x-\lambda_1y-\lambda_1z+25\lambda_1-2x\lambda_2+3z\lambda_2+10\lambda_2$$

$$\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=0\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1}=0\\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2}=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}2x+z-\lambda_1-2\lambda_2=0\\ 2y-\lambda_1=0\\ x-\lambda_1+3\lambda_2=0\\ -x-y-z+25=0\\ -2x+3z+10=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+z-\lambda_1-2\lambda_2=0 \\ 2y-\lambda_1=0 \\ x-\lambda_1+3\lambda_2=0 \\ -x-y-z+25=0 \\ -2x+3z+10=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+z-\lambda_1-2\lambda_2=0 \\ \lambda_1=2y \\ x-\lambda_1+3\lambda_2=0 \\ -x-y-z+25=0 \\ -2x+3z+10=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+z-2y-2\lambda_2=0 \\ \lambda_1=2y \\ x-2y+3\lambda_2=0 \\ -x-y-z+25=0 \\ -2x+3z+10=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+z-2y-2\lambda_2=0 \\ \lambda_1=2y \\ x-2y+3\lambda_2=0 \\ -x-y-z+25=0 \\ x=\dfrac{3z+10}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3z+10+z-2y-2\lambda_2=0 \\ \lambda_1=2y \\ \dfrac{3z+10}{2}-2y+3\lambda_2=0 \\ \dfrac{-3z-10}{2}-y-z+25=0 \\ x=\dfrac{3z+10}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4z+10-2y-2\lambda_2=0 \\ \lambda_1=2y \\ 3z+10-4y+6\lambda_2=0 \\ -2y-5z+40=0 \\ x=\dfrac{3z+10}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4z+10-2y-2\lambda_2=0 \\ \lambda_1=2y \\ 3z+10-4y+6\lambda_2=0 \\ y=\dfrac{-5z+40}{2} \\ x=\dfrac{3z+10}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4z+10+5z-40-2\lambda_2=0 \\ \lambda_1=2y \\ 3z+10+10z-80+6\lambda_2=0 \\ y=\dfrac{-5z+40}{2} \\ x=\dfrac{3z+10}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9z-30-2\lambda_2=0 \\ \lambda_1=2y \\ 13z-70+6\lambda_2=0 \\ y=\dfrac{-5z+40}{2} \\ x=\dfrac{3z+10}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2=3 \\ \lambda_1=2y \\ y=\dfrac{-5z+40}{2} \\ x=\dfrac{3z+10}{2} \\ z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_2=3 \\ \lambda_1=20 \\ y=10 \\ x=11 \\ z=4 \end{cases}$$

Per tant, tenim el punt crític (11, 10, 4) amb $\lambda_1=20$ i $\lambda_2=3$

$$HL_{(x,y,z)}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow HL_{(x,y,z)}(11,10,4,20,3)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$HL_{(x,y,z)}(11,10,4,20,3)$ és indefinida. Per tant, cal mirar què passa en les direccions factibles:

$$Jg(x,y,z)=\begin{pmatrix}\nabla g_1(x,y,z)\\ \nabla g_2(x,y,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad Jg(11,10,4)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$Jg(11,10,4)\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases}a+b+c=0\\ 2a-3c=0\end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}b=-\dfrac{5}{2}c\\ a=\dfrac{3}{2}c\end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{2}c,-\frac{5}{2}c,c\right)\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0' & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2}c\\ -\dfrac{5}{2}c\\ c\end{pmatrix}=\left(4c \quad -5c \quad \frac{3}{2}c\right)\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2}c\\ -\dfrac{5}{2}c\\ c\end{pmatrix}=6c^2+\frac{25}{2}c^2+\frac{3}{2}c^2>0$$

Com que és positiu, podem concloure que (11, 10, 4) amb $\lambda_1=20$ i $\lambda_2=3$ és un mínim restringit. Per tant, utilitzarem 11 unitats de l'input *x*, 10 de l'input *y* i 4 de l'input *z*.

27. Una empresa ha de transportar tres tipus de matèria primera *x*, *y*, *z*. El cost de transport es determina per la funció

$$CT=x^2+y^2+z^2$$

Cadascuna de les matèries primeres és dins d'un recipient, amb un volum mitjà de 2, 1 i 7 m^3, respectivament. El volum total de la càrrega ha de ser de 20 m^3. Determineu la compra òptima per tal de minimitzar el cost de transport. Què passa amb el cost mínim si s'incrementa el volum total de la càrrega en 1,5 metres cúbics més?

$$\begin{aligned}&Opt. \quad f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2\\ &s.a. \quad 2x+y+7z=20\end{aligned}$$

Busquem la funció lagrangiana:

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda(2x+y+7z-20)=x^2+y^2+z^2-2x\lambda-y\lambda-7z\lambda+20\lambda$$

$$\nabla L(x,y,z,\lambda)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial \lambda}=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x-2\lambda=0 \\ 2y-\lambda=0 \\ 2z-7\lambda=0 \\ -2x-y-7z+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-2\lambda=0 \\ 2y-\lambda=0 \\ 2z-7\lambda=0 \\ -2x-y-7z+20=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{\lambda}{2} \\ z=\dfrac{7\lambda}{2} \\ -2x-y-7z+20=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{\lambda}{2} \\ z=\dfrac{7\lambda}{2} \\ -2\lambda-\dfrac{\lambda}{2}-\dfrac{49\lambda}{2}+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{\lambda}{2} \\ z=\dfrac{7\lambda}{2} \\ -4\lambda-\lambda-49\lambda+40=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{\lambda}{2} \\ z=\dfrac{7\lambda}{2} \\ -54\lambda+40=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{20}{27} \\ y=\dfrac{10}{27} \\ z=\dfrac{70}{27} \\ \lambda=\dfrac{20}{27} \end{cases}$$

Per tant, tenim el punt crític $\left(\frac{20}{27},\frac{10}{27},\frac{70}{27}\right)$ amb $\lambda=\frac{20}{27}$.

$$HL_{(x,y,z)}(x,y,z,\lambda)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow HL_{(x,y,z)}\left(\frac{20}{27},\frac{10}{27},\frac{70}{27},\frac{20}{27}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$HL_{(x,y,z)}\left(\frac{20}{27},\frac{10}{27},\frac{70}{27},\frac{20}{27}\right)$ és definida positiva; per tant, $\left(\frac{20}{27},\frac{10}{27},\frac{70}{27}\right)$ és un mínim. Per tant, la comprarem $\frac{20}{27}$ unitats de matèria x, $\frac{10}{27}$ unitats de matèria y i $\frac{70}{27}$ unitats de matèria z.

Pel teorema de sensibilitat, si s'incrementa el volum mínim en 1,5 unitats més; llavors, el cost mínim s'incrementarà:

$$1{,}5\cdot\frac{20}{27}=1{,}\widehat{1} \text{ unitats monetàries.}$$

28. Disposem de 1536 euros per construir un contenidor. Els costos de construcció per metre quadrat són de 5 euros per al sòl, 4 euros per a cada paret i 3 euros per al sostre. Determineu les dimensions per tal que el volum sigui màxim.

$$Opt. \quad f(x,y,z) = xyz$$
$$s.a. \quad 8xy + 8zy + 8xz = 1536$$

Busquem la funció lagrangiana:

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(8xy + 8zy + 8xz - 1536) = xyz - 8xy\lambda - 8zy\lambda - 8xz\lambda + 1536\lambda$$

$$\nabla L(x,y,z,\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} yz - 8y\lambda - 8z\lambda = 0 \\ xz - 8x\lambda - 8z\lambda = 0 \\ xy - 8y\lambda - 8x\lambda = 0 \\ -8xy - 8zy - 8xz + 1536 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz - 8y\lambda - 8z\lambda = 0 \\ xz - 8x\lambda - 8z\lambda = 0 \\ xy - 8y\lambda - 8x\lambda = 0 \\ -8xy - 8zy - 8xz + 1536 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(z - 8\lambda) - 8z\lambda = 0 \\ x(z - 8\lambda) - 8z\lambda = 0 \\ xy - 8y\lambda - 8x\lambda = 0 \\ -8xy - 8zy - 8xz + 1536 = 0 \end{cases}$$

Si restem les dues primeres obtenim:

$$(y - x)(z - 8\lambda) = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} x = y \\ \quad ó \\ z = 8\lambda \end{cases}$$

Però $z \neq 8\lambda$, perquè llavors $\lambda = 0$, i no pot ser.

$$\begin{cases} x = y \\ y(z - 8\lambda) - 8z\lambda = 0 \\ y^2 - 16y\lambda = 0 \\ -8y^2 - 16zy + 1536 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ y(z - 8\lambda) - 8z\lambda = 0 \\ y(y - 16\lambda) = 0 \\ -8y^2 - 16zy + 1536 = 0 \end{cases} \underset{(1)}{\rightarrow} \begin{cases} x = y \\ y(z - 8\lambda) - 8z\lambda = 0 \\ y = 16\lambda \\ -8y^2 - 16zy + 1536 = 0 \end{cases}$$

(1) $y \neq 0$, ja que si no fos així no compliria l'última equació.

$$\begin{cases} x = y \\ 8\lambda z - 128\lambda^2 = 0 \\ y = 16\lambda \\ -2048\lambda^2 - 256z\lambda + 1536 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ 8\lambda z - 128\lambda^2 = 0 \\ y = 16\lambda \\ -2048\lambda^2 - 256z\lambda + 1536 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ 8\lambda(z - 16\lambda) = 0 \\ y = 16\lambda \\ -2048\lambda^2 - 256z\lambda + 1536 = 0 \end{cases} \underset{(2)}{\rightarrow} \begin{cases} x = y \\ z = 16\lambda \\ y = 16\lambda \\ -2048\lambda^2 - 256z\lambda + 1536 = 0 \end{cases}$$

(2) El paràmetre $\lambda = 0$, perquè sinó no compliria l'última equació.

$$\begin{cases} x = y \\ z = 16\lambda \\ y = 16\lambda \\ -6144\lambda^2 + 1536 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 16\lambda \\ y = 16\lambda \\ -6144\lambda^2 + 1536 = 0 \end{cases} \underset{(3)}{\rightarrow} \begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \\ y = 4 \\ \lambda = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

(3) Prenem el λ positiu, ja que el negatiu ens dóna dimensions negatives.

Per tant, tenim el punt crític: $(4, 4, 4)$ amb $\lambda = \dfrac{1}{4}$

$$HL_{(x,y,z)}(x,y,z,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & z - 8\lambda & y - 8\lambda \\ z - 8\lambda & 0 & x - 8\lambda \\ y - 8\lambda & x - 8\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$HL_{(x,y,z)}\left(4,4,4,\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$HL_{(x,y,z)}\left(4,4,4,\frac{1}{4}\right) \rightarrow \textit{indefinida}$$

Per tant, mirem què passa sobre les direccions factibles:

$$Jg(x,y,z) = \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8y + 8z & 8x + 8z & 8y + 8x \end{pmatrix}$$

$$Jg(4,4,4)\cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 64 & 64 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \{64a + 64b + 64c = 0 \rightarrow \{a = -b - c$$

Llavors, $\Delta v=(-b-c,\ b,\ c)$. Per tant, mirem què passa:

$$(-b-c,b,c)\cdot HL_{(x,y,z)}\left(4,4,4,\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}-b-c\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

$$(-b-c,b,c)\cdot\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-b-c\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b+2c & -2b & -2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b-c\\ b\\ c\end{pmatrix}=-4b^2-4bc-4c^2<0$$

Per tant, $(4, 4, 4)$ és un màxim restringit.

29. Voleu construir un contenidor de 125 m^{3}de volum. Els costos de fabricació per metre quadrat són de 5 euros per al sòl, 4 euros per a cada paret i 3 euros per al sostre. Determineu les dimensions del contenidor per tal que el cost total sigui mínim.

$$\begin{array}{ll} Opt. & f(x,y,z)=8xy+8yz+8xz \\ s.a. & xyz=125 \end{array}$$

Busquem la funció lagrangiana:

$$L(x,y,z,\lambda)=8xy+8yz+8xz-\lambda(xyz-125)=8xy+8yz+8xz-xyz\lambda+125\lambda$$

$$\nabla L(x,y,z,\lambda)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial z}=0\\[2mm] \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial \lambda}=0\end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}8y+8z-yz\lambda=0\\ 8x+8z-xz\lambda=0\\ 8y+8x-xy\lambda=0\\ -xyz+125=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}8y+8z-yz\lambda=0\\ 8x+8z-xz\lambda=0\\ 8y+8x-xy\lambda=0\\ -xyz+125=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y(8-z\lambda)+8z=0\\ x(8-z\lambda)+8z=0\\ 8y+8x-xy\lambda=0\\ -xyz+125=0\end{cases}$$

Si restem les dues primeres obtenim:

$$(y-x)(8-z\lambda)=0 \quad \rightarrow \begin{cases} x=y \\ \quad ó \\ z=\dfrac{8}{\lambda} \end{cases}$$

Però $z \neq \dfrac{8}{\lambda}$, perquè no compliria les dues primeres equacions.

$$\begin{cases} x=y \\ y(8-z\lambda)+8z=0 \\ 16y-y^2\lambda=0 \\ -y^2z+125=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ y(8-z\lambda)+8z=0 \\ y(16-y\lambda)=0 \\ -y^2z+125=0 \end{cases} \xrightarrow[(1)]{} \begin{cases} x=y \\ y(8-z\lambda)+8z=0 \\ y=\dfrac{16}{\lambda} \\ -y^2z+125=0 \end{cases}$$

(1) $y \neq 0$, ja que si no fos així no compliria l'última equació.

$$\begin{cases} x=y \\ \dfrac{16}{\lambda}(8-z\lambda)+8z=0 \\ y=\dfrac{16}{\lambda} \\ -\dfrac{256}{\lambda^2}z+125=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ \dfrac{16}{\lambda}(8-z\lambda)+8z=0 \\ y=\dfrac{16}{\lambda} \\ -256z+125\lambda^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ 128-8z\lambda=0 \\ y=\dfrac{16}{\lambda} \\ -256z+125\lambda^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y \\ 128-8z\lambda=0 \\ y=\dfrac{16}{\lambda} \\ -256z+125\lambda^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=\dfrac{16}{\lambda} \\ y=\dfrac{16}{\lambda} \\ -256z+125\lambda^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{16}{\lambda} \\ z=\dfrac{16}{\lambda} \\ y=\dfrac{16}{\lambda} \\ -\dfrac{4096}{\lambda}+125\lambda^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ z=5 \\ y=5 \\ \lambda=\dfrac{16}{5} \end{cases}$$

(*) Nota: podem observar que per la simetria de les variables obtenim *x*=*y*=*z*.

Per tant, tenim el punt crític (5, 5, 5) amb $\lambda=\dfrac{16}{5}$.

$$HL_{(x,y,z)}(x,y,z,\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 8-z\lambda & 8-y\lambda \\ 8-z\lambda & 0 & 8-x\lambda \\ 8-y\lambda & 8-x\lambda & 0 \end{pmatrix} \rightarrow HL_{(x,y,z)}\left(5,5,5,\frac{16}{5}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -8 & -8 \\ -8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$HL_{(x,y,z)}\left(5,5,5,\frac{16}{5}\right) \rightarrow \textit{indefinida}.$$

Per tant, mirem què passa sobre les direccions factibles:

$$Jg(x,y,z) = \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$Jg(5,5,5)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 25 & 25 & 25 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \;\rightarrow\; \{25a + 25b + 25c = 0 \rightarrow \{a = -b-c\,.$$

Llavors, $\Delta v=(-b-c,\, b,\, c)$. Per tant, mirem què passa:

$$(-b-c,b,c)\cdot HL_{(x,y,z)}\left(5,5,5,\frac{16}{5}\right)\begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$(-b-c,b,c)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -8 & -8 \\ -8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8b-8c & 8b & 8c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = 16b^2 + 16bc + 16c^2 > 0$$

Com que és positiva, el punt $(5, 5, 5)$ és un mínim restringit.

30. Un ramader vol construir una tanca rectangular a la vora d'un riu recte. Només té 1.000 metres de filferro i no cal tanca pel costat del riu. Quina és l'àrea màxima que es pot envoltar amb una tanca de filferro? Quants metres quadrats es poden tancar amb cada metre de filferro addicional?

$$\begin{aligned} &Opt. \quad f(x,y) = xy \\ &s.a. \quad 2x + y = 1000 \end{aligned}$$

Busquem la funció lagrangiana:
$L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(2x + y - 1000) = xy - 2x\lambda - y\lambda + 1000\lambda$

$$\nabla L(x,y,\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y - 2\lambda = 0 \\ x - \lambda = 0 \\ -2x - y + 1000 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2\lambda = 0 \\ x - \lambda = 0 \\ -2x - y + 1000 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2\lambda \\ x = \lambda \\ -2x - y + 1000 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2\lambda \\ x = \lambda \\ -2\lambda - 2\lambda + 1000 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2\lambda \\ x = \lambda \\ \lambda = 250 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 500 \\ x = 250 \\ \lambda = 250 \end{cases}$$ Punt crític: (250, 500) amb $\lambda = 250$

$$HL_{(x,y)}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad HL_{(x,y)}(250{,}500{,}250) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$HL_{(x,\,y)}$ (250, 500, 250) és indefinida. Per tant, cal mirar les direccions factibles:

$$Jg(x, y) = \nabla g(x, y) = (2 \;\; 1) \;\rightarrow\; Jg(250{,}500) = (2 \;\; 1)$$

$$Jg(250{,}500) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (0) \;\rightarrow\; (2 \;\; 1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \;\rightarrow\; 2a + b = 0 \rightarrow b = -2a$$

Llavors, $\Delta v = (a, -2a)$:

$$(a,-2a)HL_{(x,y)}(250{,}500{,}250)\begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix}$$

$$(a,-2a)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} = (-2a \quad a)\begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} = -4a^2 < 0$$

Com que és negativa, el punt (250,500) serà un màxim restringit.
Per tant, l'àrea màxima que podrem envoltar amb la tanca de filferro serà:

$$f(250{,}500) = 250 \times 500 = 125000\, m^2$$

Pel teorema de sensibilitat, per cada metre de filferro addicional podrem tancar una àrea de 250 metres quadrats més, aproximadament.

31. Una cadena de televisió catalana està elaborant la programació per al proper mes. Cada pel·lícula és vista per 2 milions d'espectadors i cada partit de futbol és vist per 3 milions d'espectadors. Les despeses de retransmissió per a pel·lícules (x_1) i partits de futbol (x_2) estan donades per l'expressió $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{3x_2^2}{2}$. El pressupost de la cadena per cobrir les despeses del mes de novembre és de 10 u.m. (que gastarà íntegrament). Quantes pel·lícules i partits de futbol programarà la cadena per maximitzar la seva audiència? Quant s'hauria d'augmentar el pressupost per tal que l'audiència fos d'11 milions d'espectadors?

$$\begin{aligned} &Opt. \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ &s.a. \quad x_1^2 + \frac{3x_2^2}{2} = 10 \end{aligned}$$

Busquem la funció lagrangiana:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=2x_1+3x_2-\lambda(x_1^2+\frac{3x_2^2}{2}-10)=2x_1+3x_2-x_1^2\lambda-\frac{3x_2^2}{2}\lambda+10\lambda$$

$$\nabla L(x_1,x_2,\lambda)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2}=0 \\ \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda}=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2-2x_1\lambda=0 \\ 3-3x_2\lambda=0 \\ -x_1^2-\dfrac{3x_2^2}{2}+10=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2-2x_1\lambda=0 \\ 3-3x_2\lambda=0 \\ -x_1^2-\dfrac{3x_2^2}{2}+10=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{\lambda} \\ x_2=\dfrac{1}{\lambda} \\ -x_1^2-\dfrac{3x_2^2}{2}+10=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{\lambda} \\ x_2=\dfrac{1}{\lambda} \\ -\dfrac{1}{\lambda^2}-\dfrac{3}{2\lambda^2}+10=0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{\lambda} \\ x_2=\dfrac{1}{\lambda} \\ -2-3+20\lambda^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{\lambda} \\ x_2=\dfrac{1}{\lambda} \\ \lambda=\pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Punts crítics (2,2) amb $\lambda=\frac{1}{2}$ i $(-2,-2)$ amb $\lambda=-\frac{1}{2}$. Però aquest últim no pot ser, ja que la quantitat de pel·lícules i partits de futbol mai pot ser negativa.

$$HL_{(x_1,x_2)}(x_1,x_2,\lambda)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad HL_{(x_1,x_2)}\left(2,2,\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Atès que $HL_{(x_1,x_2)}\left(2,2,\frac{1}{2}\right)$ és definida negativa, el punt (2,2) serà un màxim. Per tant, per tenir el màxim d'audiència caldrà emetre 2 pel·lícules i 2 partits de futbol.

Tenim que $f(2,2)=10$ milions d'espectadors com a màxim. Pel teorema de sensibilitat, atès que $\lambda=\frac{1}{2}$, per cada unitat monetària que augmentarem tindrem $\frac{1}{2}$ milions d'espectadors més. Per tant, per tenir 11 milions d'espectadors hauríem d'augmentar el pressupost a 12 u.m.

32. La funció de cost total d'un monopolista que produeix dos béns és

$$C(q_1,q_2)=\frac{1}{6}q_1^2+10q_2+90$$

on q_1 i q_2 representen les unitats produïdes d'aquests béns. Suposem que les funcions de demanda de l'empresa estan donades per

$$\begin{aligned} q_1+5p_1+3p_2&=1240\\ q_2+3p_1+2p_2&=770 \end{aligned}$$

On p_1 i p_2 són els preus de cadascún dels béns.

1. Justifiqueu que els preus que proporcionen el benefici màxim són p_1=140 i p_2=70, respectivament.

Mètode directe:

Prodem utilitzar el mètode directe, donat que les restriccions en aquest cas són lineals.

Busquem la funció de beneficis, tenint en compte que:

$$\begin{aligned} q_1+5p_1+3p_2&=1240\\ q_2+3p_1+2p_2&=770 \end{aligned} \quad\rightarrow\quad \begin{aligned} q_1&=1240-5p_1-3p_2\\ q_2&=770-3p_1-2p_2 \end{aligned}$$

I per tant, substituint obtenim,

$$\begin{aligned} B(p_1,p_2)=I(p_1,p_2)-C(p_1,p_2)&=p_1(1240-5p_1-3p_2)+p_2(770-3p_1-2p_2)\\ &-\frac{1}{6}(1240-5p_1-3p_2)^2-10(770-3p_1-2p_2)-90=\\ &=-\frac{55}{6}p_1^2-\frac{7}{2}p_2^2-11p_1p_2+\frac{10010}{3}p_1+2030p_2-\frac{792170}{3} \end{aligned}$$

Per tal de justificar que el punt (p_1, p_2)= (140, 70) és un màxim de la funció de beneficis restringida a les dues funcions de demanda anteriors, cal comprovar que $\nabla B(140,70)$=0 i a més a més esudiar $HB(140,70)$.

$$\nabla B(p_1,p_2)=\left(-\frac{55}{3}p_1-11p_2+\frac{10010}{3},-7p_2-11p_1+2030\right)$$

$$\nabla B(140{,}70)=(0,0)$$

$$HB(p_1,p_2)=\begin{pmatrix}-\frac{55}{3} & -11\\ -11 & -7\end{pmatrix}\rightarrow HB(140{,}70)=\begin{pmatrix}-\frac{55}{3} & -11\\ -11 & -7\end{pmatrix} \text{ és definida negativa}$$

Com $\nabla B(140, 70)=0$ i $HB(140, 70)$ és definida negativa, per la condició suficient de segon ordre tindrem que $(140, 70)$ és un màxim local estricte de B.

2. Disposem de 150 unitats monetàries per incrementar un (i només un) dels dos termes independents de les restriccions (1240 i 770). Cada unitat addicional del primer recurs (1240) té un preu de 10 u.m.; cada unitat addicional del segon recurs (770) té un preu de 15 u.m. Quin dels dos hauríem d'augmentar per obtenir el millor profit? Quin seria, aproximadament, el nou benefici?

Aplicarem el Teorema de Sensibilitat però caldrà obtenir el valor dels multiplicadors de Lagrange.

Si haguéssim utilitzat el mètode dels multiplicadors de Lagrange a l'apartat anterior, ja tindríem els valors dels λ però quan el número de variables és elevat, aquest mètode és un pèl més feixuc que el mètode directe.

No obstant per trobar els multiplicadors de Lagrange sols ens caldrà imposar que el punt (140, 70) compleixi la condició de primer ordre sobre la funció lagrangiana del benefici.

Buscarem la funció de benefici:

$$B(q_1,q_2,p_1,p_2) = I(q_1,q_2,p_1,p_2) - C(q_1,q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 - \frac{1}{6}q_1^2 - 10q_2 - 90$$

$$s.a. \begin{cases} q_1 + 5p_1 + 3p_2 = 1240 \\ q_2 + 3p_1 + 2p_2 = 770 \end{cases}$$

Busquem la funció Lagrangiana:

$$\begin{gathered} L(q_1,q_2,p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2) = p_1q_1 + p_2q_2 - \frac{1}{6}q_1^2 - 10q_2 - 90 - \lambda_1(q_1 + 5p_1 + 3p_2 - 1240) - \\ - \lambda_2(q_2 + 3p_1 + 2p_2 - 770) = \end{gathered}$$

$$= p_1q_1 + p_2q_2 - \frac{1}{6}q_1^2 - 10q_2 - 90 - q_1\lambda_1 - 5p_1\lambda_1 - 3p_2\lambda_1 + 1240\lambda_1 - q_2\lambda_2 - 3p_1\lambda_2 - 2p_2\lambda_2 + 770\lambda_2$$

Imposarem la condició de primer ordre al punt (140, 70), tenint en compte que:

$$\begin{matrix} q_1 + 5p_1 + 3p_2 = 1240 \\ q_2 + 3p_1 + 2p_2 = 770 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} q_1 + 5\cdot 140 + 3\cdot 70 = 1240 \\ q_2 + 3\cdot 140 + 2\cdot 70 = 770 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} q_1 = 330 \\ q_2 = 210 \end{matrix}$$

$$\nabla L(q_1,q_2,p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L(q_1,q_2,p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial q_1}=0 \\ \dfrac{\partial L(q_1,q_2,p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial q_2}=0 \\ \dfrac{\partial L(q_1,q_2,p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial p_1}=0 \\ \dfrac{\partial L(q_1,q_2,p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial p_2}=0 \\ \dfrac{\partial L(q_1,q_2,p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1}=0 \\ \dfrac{\partial L(q_1,q_2,p_1,p_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1-\frac{1}{3}q_1-\lambda_1=0 \\ p_2-10-\lambda_2=0 \\ q_1-5\lambda_1-3\lambda_2=0 \\ q_2-3\lambda_1-2\lambda_2=0 \\ -q_1-5p_1-3p_2+1240=0 \\ -q_2-3p_1-2p_2+770=0 \end{cases}$$

$$\nabla L(330,210,140,70,\lambda_1,\lambda_2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 140-\frac{1}{3}330-\lambda_1=0 \\ 70-10-\lambda_2=0 \\ 330-5\lambda_1-3\lambda_2=0 \\ 210-3\lambda_1-2\lambda_2=0 \\ -330-5\cdot 140-3\cdot 70+1240=0 \\ -210-3\cdot 140-2\cdot 70+770=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \lambda_1=30 \quad \lambda_2=60$$

Si augmentem el terme independent 1240:

Amb 150 unitats monetàries (a 10 u.m. cada unitat addicional), podrem comprar 15 unitats més. Per tant augmentarem de 1240 a 1255.

Benefici anterior: $B(140, 70)$=40560 u.m.

Benedific actual aproximat: $B(140, 70)+15 \cdot 30$=41010 u.m.

Si augmentem el terme independent 770:

Amb 150 unitats monetàries (a 15 u.m. cada unitat addicional), podrem comprar 10 unitats més. Per tant augmentarem de 770 a 780.

Benefici anterior: $B(140, 70)$=40560 u.m.

Benefici actual aproximat:$B(140, 70)+10 \cdot 60$=41160 u.m.

Hauríem d'augmentar el segon recurs per tal d'obtenir major profit.

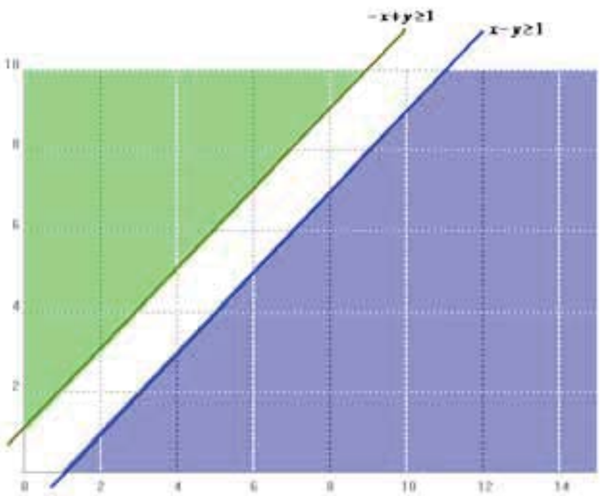
Exercicis del tema 5: Optimització lineal amb restriccions de desigualtat

33. Resoleu gràficament i pel mètode del símplex els problemes següents:

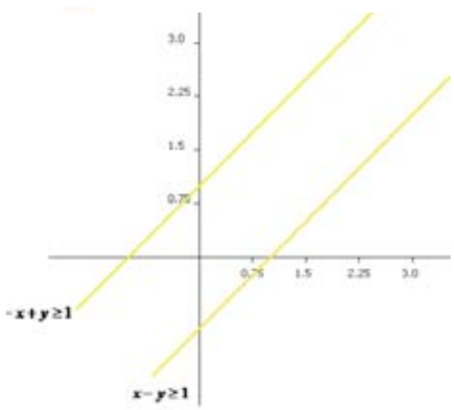
a) Mètode gràfic:

$$\begin{aligned} &Min \quad -x+y \\ &s.a. \quad x-y\geq 1 \\ &\qquad -x+y\geq 1 \\ &\qquad\quad x,y\geq 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x-y\geq 1 \\ -x+y\geq 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y\leq x-1 \\ y\geq x+1 \end{aligned}\right\}$$
$$x,y\geq 0$$



Imatge 30



Imatge 31

No hi ha regió admissible, ja que és buida. Per tant, no tenim vèrtexs ni tampoc òptims.

Mètode del símplex:

$$\begin{aligned} Min \quad & -x+y \\ s.a. \quad & x-y \geq 1 \\ & -x+y \geq 1 \\ & x,y \geq 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} Max \quad & x-y+0t+0u-wc-wd \\ s.a. \quad & x-y-t+c=1 \\ & -x+y-u+d=1 \\ & x,y,t,u,c,d \geq 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*c*	*d*	*B*
−w	c	1	−1	−1	0	1	0	1
−w	d	−1	1	0	−1	0	1	1
		−1	1	w	w	0	0	−2w

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*c*	*d*	*B*
1	x	1	−1	−1	0	1	0	1
−w	d	0	0	−1	−1	1	1	2
		0	0	−1 + w	w	1	0	1−2w

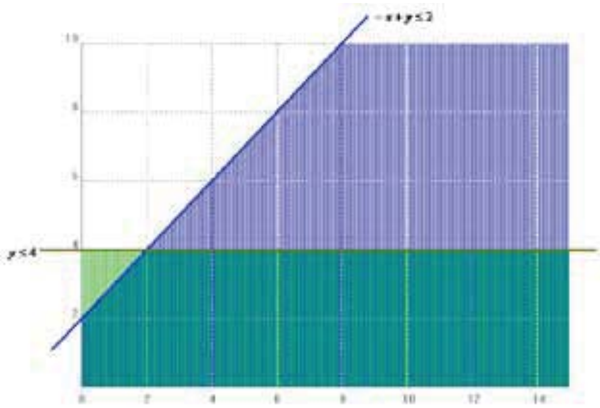
Hi ha inexistència de solució factible, ja que la variable artificial $d = 2 > 0$.

b) Mètode gràfic:

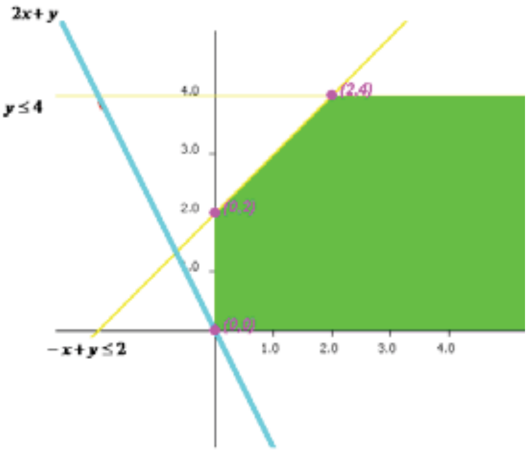
$$\begin{aligned} Max \quad & 2x+y \\ s.a. \quad & -x+y \leq 2 \\ & y \leq 4 \\ & x,y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} -x+y &\leq 2 \\ y &\leq 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y &\leq x+2 \\ y &\leq 4 \end{aligned}\right\}$$

$$x,y \geq 0$$



Imatge 32



Imatge 33

Vèrtexs (a, b)	$(0, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$
Valor de la funció $f(x, y)$	0	2	8

Veiem que la regió admissible no està buida, però no està acotada (hi falten vèrtexs) el màxim s'assoleix al punt (2,4) dels vèrtexs considerats, però si prenem el punt (3,4) la funció val 10, i si prenem (4,4) la funció val 12,... És a dir, el màxim estaria a un dels vèrtexs que ens fa falta.

Mètode del símplex:

$$\begin{aligned} &Max \quad 2x + y \\ &s.a. \quad -x + y \leq 2 \\ &\qquad\quad y \leq 4 \\ &\qquad\quad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} &Max \quad 2x + y + 0t + 0u \\ &s.a. \quad -x + y + t = 2 \\ &\qquad\quad y + u = 4 \\ &\qquad\quad x, y, t, u \geq 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	v.b.	x	y	t	u	B
0	t	-1	1	1	0	2
0	u	0	1	0	1	4
		-2	-1	0	0	0

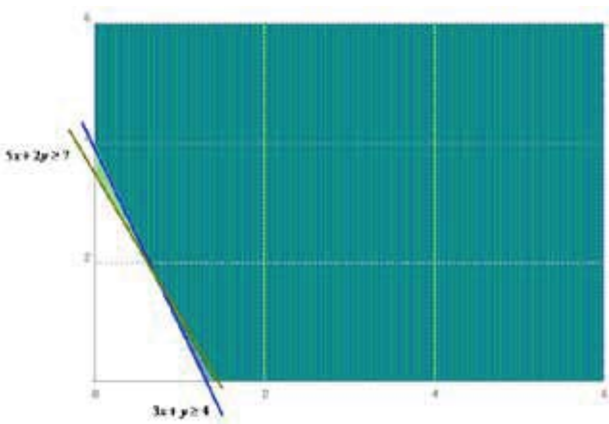
Inexistència de solució òptima; és a dir, la solució no està limitada, ja que hi ha una columna (la primera) on $z_1-c_1<0$ i $a_{i1}\leq 0$.

c) Mètode gràfic:

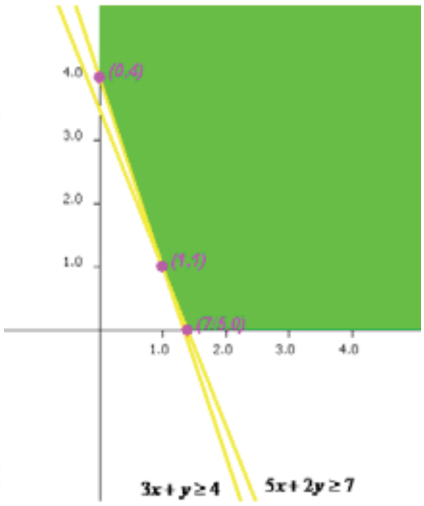
$$\begin{aligned} &Min \quad 6x+8y \\ &s.a. \quad 3x+y\geq 4 \\ &\qquad\; 5x+2y\geq 7 \\ &\qquad\quad x,y\geq 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x+y\geq 4 \\ 5x+2y\geq 7 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y\geq -3x+4 \\ y\leq -\frac{5}{2}x+\frac{7}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$x,y\geq 0$$



Imatge 34



Imatge 35

Vèrtexs (a, b)	(0, 4)	(1, 1)	(7/5, 0)
Valor de la funció $f(x, y)$	32	14	42/5

Veiem que la regió admissible no està buida, però no està acotada (hi falten vèrtexs) el mínim s'assoleix al punt (7/5,0) dels vèrtexs considerats, però si prenem el punt

(2,0) la funció val 12 i si prenem (0,5) la funció val 40. És a dir, el mínim està en el vèrtex (7/5,0).

Mètode del símplex:

$$\begin{aligned} Min\quad & 6x+8y \\ s.a.\quad & 3x+y \geq 4 \\ & 5x+2y \geq 7 \\ & x,y \geq 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} Max\quad & -6x-8y+0t+0u-wc-wd \\ s.a.\quad & 3x+y-t+c=4 \\ & 5x+2y-u+d=7 \\ & x,y,t,u,c,d \geq 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*c*	*d*	*B*
−w	c	3	1	−1	0	1	0	4
−w	d	5	2	0	−1	0	1	7
		−8w+6	−3w+8	w	w	0	0	−11w

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*c*	*d*	*B*
−6	x	1	1/3	−1/3	0	1/3	0	4/3
−w	d	0	1/3	5/3	−1	−5/3	1	1/3
		0	6 −w/3	2 −5w/3	w	−2+ 8w/3	0	−8 – w/3

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*c*	*d*	*B*
−6	x	1	2/5	0	−1/5	0	1/5	7/5
0	t	0	1/5	1	−3/5	−1	3/5	1/5
		0	28/5	0	6/5	w	w – 6/5	−42/5

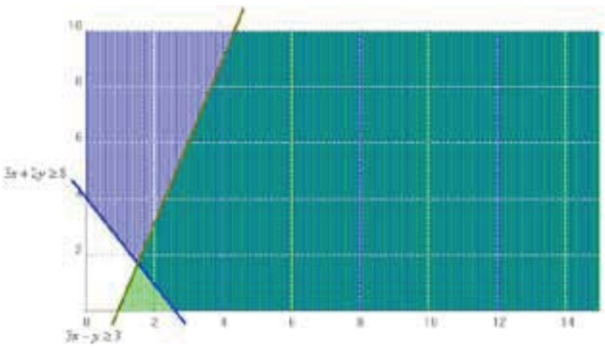
El problema té solució òptima única. El punt òptim és el $\left(\frac{7}{5},0\right)$ i el valor d'aquest punt a la funció objectiu és $\frac{42}{5}$.

d) Mètode gràfic:

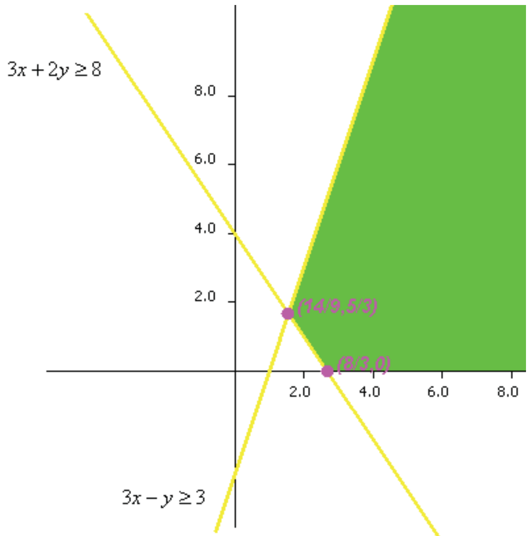
$$\begin{aligned} &Min \quad 3x - y \\ &s.a. \quad 3x + 2y \geq 8 \\ &\qquad\ \ 3x - y \geq 3 \\ &\qquad\quad\ x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y \geq 8 \\ 3x - y \geq 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y \geq -\frac{3}{2}x + 4 \\ y \leq 3x - 3 \end{aligned}\right\}$$

$$x, y \geq 0$$



Imatge 36



Imatge 37

Vèrtexs (*a*, *b*)	(14/9, 5/3)	(8/3, 0)
Valor de la funció *f*(*x*, *y*)	3	8

Veiem que la regió admissible no està buida, però no està acotada (hi falten vèrtexs) el mínim s'assoleix al punt (14/9,5/3) dels vèrtexs considerats, però si prenem el punt (7/3,4) la funció val 3. És a dir, el mínim s'assoleix en tots els punts de la recta $y = 3x-3$. Per tant, tenim infinites (múltiples) solucions òptimes.

Mètode del símplex:

$$\begin{aligned} &Min \quad 3x - y \\ &s.a. \quad 3x + 2y \geq 8 \\ &\qquad 3x - y \geq 3 \\ &\qquad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} &Max \quad -3x + y + 0t + 0u - wc - wd \\ &s.a. \quad 3x + 2y - t + c = 8 \\ &\qquad 3x - y - u + d = 3 \\ &\qquad x, y, t, u, c, d \geq 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*c*	*d*	*B*
−w	c	3	2	−1	0	1	0	8
−w	d	3	−1	0	−1	0	1	3
		−6w+3	−w−1	w	w	0	0	−11w

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*c*	*d*	*B*
−w	c	0	3	−1	1	1	−1	5
−3	x	1	−1/3	0	−1/3	0	1/3	1
		0	−3w	w	−w+1	0	2w−1	−5w−3

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*c*	*d*	*B*
1	y	0	1	−1/3	1/3	1/3	−1/3	5/3
−3	x	1	0	−1/9	−2/9	1/9	2/9	14/9
		0	0	0	1	w	−1+w	−3

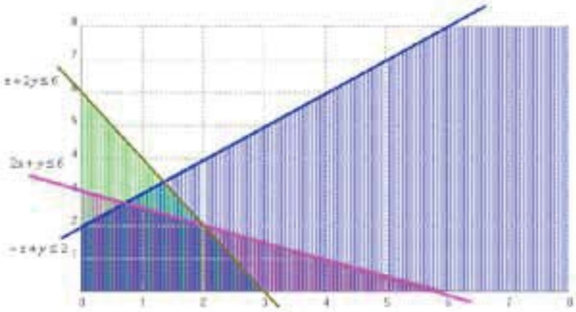
El problema té solució òptima múltiple no fitada, ja que la tercera columna és una variable no bàsica i $z_3-c_3=0$ i, a més a més, $a_{i3}\leq 0$ per $i=1,2$.

e) Mètode gràfic:

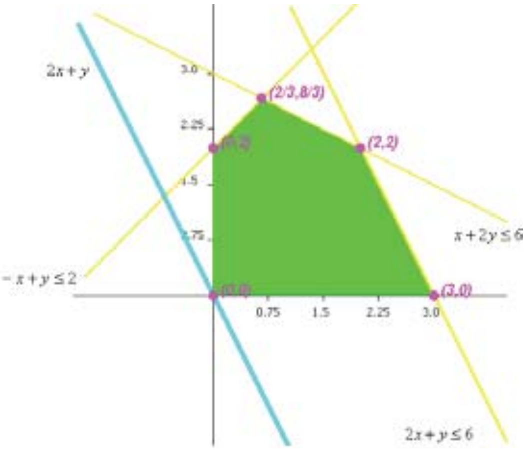
$$\begin{aligned} &Max \quad 2x + y \\ &s.a. \quad -x + y \leq 2 \\ &\qquad 2x + y \leq 6 \\ &\qquad x + 2y \leq 6 \\ &\qquad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r}-x+y\le 2\\ 2x+y\le 6\\ x+2y\le 6\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}y\le x+2\\ y\le -2x+6\\ y\le -\dfrac{1}{2}x+3\end{array}\right\}$$

$$x,y\ge 0$$



Imatge 38



Imatge 39

Vèrtexs (a, b)	$(0, 0)$	$(0, 2)$	$(2/3, 8/3)$	$(2, 2)$	$(3, 0)$
Valor de la funció $f(x, y)$	0	2	4	6	6

Veiem que hi ha dos vèrtex on s'assoleix el màxim. Per tant, el màxim d'aquest problema s'assoleix en tots els punts del segment que uneix el (2,2) i el (3,0). Llavors, tenim una solució múltiple (fitada).

Mètode del símplex:

$$\begin{array}{rl} Max & 2x+y \\ s.a. & -x+y\le 2 \\ & 2x+y\le 6 \\ & x+2y\le 6 \\ & x,\, y\ge 0 \end{array}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{array}{rl} Max & 2x+y+0t+0u+0v \\ s.a. & -x+y+t=2 \\ & 2x+y+u=6 \\ & x+2y+v=6 \\ & x,y,t,u,v\ge 0 \end{array}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*v*	*B*
0	t	−1	1	1	0	0	2
0	u	2	1	0	1	0	6
0	v	1	2	0	0	1	6
		−2	−1	0	0	0	0

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*v*	*B*
0	t	0	3/2	1	1/2	0	5
2	x	1	1/2	0	1/2	0	3
0	v	0	3/2	0	−1/2	1	3
		0	0	0	1	0	6

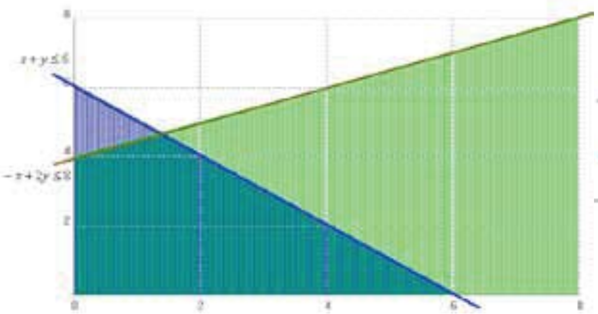
El problema té solució òptima múltiple fitada. Hi ha alguna variable no bàsica, per exemple, la y, tal que $z_2-c_2=0$ i hi ha per algun $i=1, 2, 3$ $a_{i2}>0$ (en aquest cas tots). Una solució òptima serà el punt (3, 0) i el valor de la funció al punt òptim és 6.

f) Mètode gràfic:

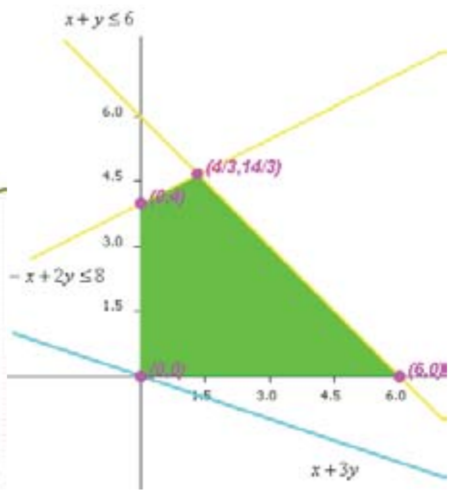
$$\begin{aligned} &Max \quad x+3y \\ &s.a. \quad x+y\le 6 \\ &\qquad -x+2y\le 8 \\ &\qquad\quad x,y\ge 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y&\le 6 \\ -x+2y&\le 8 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y&\le -x+6 \\ y&\le \frac{x}{2}+4 \end{aligned}\right\}$$

$$x,y\ge 0$$



Imatge 40



Imatge 41

Vèrtexs (a, b)	$(0, 0)$	$(0, 4)$	$(4/3, 14/3)$	$(6, 0)$
Valor de la funció $f(x, y)$	0	12	46/3	6

Veiem que assoleix el màxim al vèrtex $(4/3, 14/3)$.

Mètode del símplex:

$$\begin{aligned} &Max \quad x + 3y \\ &s.a. \quad x + y \le 6 \\ &\quad -x + 2y \le 8 \\ &\quad x, y \ge 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} &Max \quad x + 3y + 0t + 0u \\ &s.a. \quad x + y + t = 6 \\ &\quad -x + 2y + u = 8 \\ &\quad x, y, t, u \ge 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*B*
0	t	1	1	1	0	6
0	u	−1	2	0	1	8
		−1	−3	0	0	0

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*B*
0	t	3/2	0	1	−1/2	2
3	y	−1/2	1	0	1/2	4
		−5/2	0	0	3/2	12

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*B*
1	x	1	0	2/3	−1/3	4/3
3	y	0	1	1/3	1/3	14/3
		0	0	5/3	2/3	46/3

El problema té solució òptima única. El punt òptim és el $\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$. I el valor del punt òptim a la funció objectiu és $\frac{46}{3}$.

34. Resoleu els programes següents pel mètode del símplex:

a)

$$\begin{aligned} &Max \quad 7x+6y \\ &s.a. \quad 3x+2y \le 240 \\ &\qquad 2x+3y \le 300 \\ &\qquad 2x+y \le 145 \\ &\qquad x,y \ge 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} &Max \quad 7x+6y+0t+0u+0v \\ &s.a. \quad 3x+2y+t=240 \\ &\qquad 2x+3y+u=300 \\ &\qquad 2x+y+v=145 \\ &\qquad x,y,t,u,v \ge 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*v*	*B*
0	t	3	2	1	0	0	240
0	u	2	3	0	1	0	300
0	v	2	1	0	0	1	145
		−7	−6	0	0	0	0

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*v*	*B*
0	t	0	1/2	1	0	−3/2	45/2
0	u	0	2	0	1	−1	155
7	x	1	1/2	0	0	1/2	145/2
		0	−5/2	0	0	7/2	1015/2

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*v*	*B*
6	y	0	1	2	0	−3	45
0	u	0	0	−4	1	5	65
7	x	1	0	−1	0	2	50
		0	0	5	0	−4	620

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*v*	*B*
6	y	0	1	−2/5	3/5	0	84
0	v	0	0	−4/5	1/5	1	13
7	x	1	0	3/5	−2/5	0	24
		0	0	9/5	4/5	0	672

El problema té solució òptima única. El punt (24,84) és un màxim global. I el valor del punt a la funció objectiu és 672.

b)

$$\begin{aligned} &Min \quad 3x+4y \\ &s.a. \quad x+y \geq 2 \\ &\qquad\quad x \leq y \\ &\qquad\quad x,y \geq 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} &Max \quad -3x-4y+0t+0u-wc \\ &s.a. \quad x+y-t+c=2 \\ &\qquad\quad x-y+u=0 \\ &\qquad\quad x,y,t,u,c \geq 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*c*	*B*
−w	c	1	1	−1	0	1	2
0	u	1	−1	0	1	0	0
		−w+3	−w+4	w	0	0	−2w

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*c*	*B*
−w	c	0	2	−1	−1	1	2
−3	x	1	−1	0	1	0	0
		0	−2w+7	w	w−3	0	−2w

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*c*	*B*
−4	y	0	1	−1/2	−1/2	1/2	1
−3	x	1	0	−1/2	1/2	1/2	1
		0	0	7/2	1/2	−7/2 +w	−7

El problema té solució òptima única. El punt (1, 1) és un mínim global. I el valor del punt a la funció objectiu és 7.

c)

$$\begin{aligned} &Min \quad x+5y+3z \\ &s.a. \quad x+y \leq 100 \\ &\qquad\quad 200-z \leq x+y \\ &\qquad\quad y-x \geq 0 \\ &\qquad\quad x,y,z \geq 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned}
&Max \quad -x-5y-3z+0t+0u+0v-wc\\
&s.a. \quad x+y+t=100\\
&\qquad x+y+z-u=200\\
&\qquad y-x-v+c=0\\
&\qquad x,y,z,t,u,v,c\geq 0
\end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*v*	*c*	*B*
0	t	1	1	0	1	0	0	0	100
−3	z	1	1	1	0	−1	0	0	200
−w	c	−1	1	0	0	0	−1	1	0
		−2+w	−w+2	0	0	3	w	0	−600

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*v*	*c*	*B*
0	t	2	0	0	1	0	1	−1	100
−3	z	2	0	1	0	−1	1	−1	200
−5	y	−1	1	0	0	0	−1	1	0
		0	0	0	0	3	2	−2+w	−600

El problema té solució òptima única. El punt (0,0,200) és un mínim global. I el valor del punt a la funció objectiu és 600.

d)

$$\begin{aligned}
&Max \quad 3x+5y+4z\\
&s.a. \quad 2x+5y\leq 2400\\
&\qquad 2x+3y+4z\leq 2600\\
&\qquad x,y,z\geq 0
\end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned}
&Max \quad 3x+5y+4z+0t+0u\\
&s.a. \quad 2x+5y+t=2400\\
&\qquad 2x+3y+4z+u=2600\\
&\qquad x,y,z,t,u\geq 0
\end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
0	t	2	5	0	1	0	2400
0	u	2	3	4	0	1	2600
		−3	−5	−4	0	0	0

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
5	y	2/5	1	0	1/5	0	480
0	u	4/5	0	4	−3/5	1	1160
		−1	0	−4	1	0	2400

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
5	y	2/5	1	0	1/5	0	480
4	z	1/5	0	1	−3/20	1/4	290
		−1/5	0	0	2/5	1	3560

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
3	x	1	5/2	0	1/2	0	1200
4	z	0	−1/2	1	−1/4	1/4	50
		0	1/2	0	1/2	1	3800

El problema té solució òptima única. El punt (1200,0,50) és el màxim global. I el valor del punt a la funció objectiu és 3800.

e)

$$\begin{aligned} &Max \quad 6000x + 8000y \\ &s.a. \quad 2y \leq x + 800 \\ &\qquad 3x + 2y \leq 2400 \\ &\qquad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} &Max \quad 6000x + 8000y + 0t + 0u \\ &s.a. \quad -x + 2y + t = 800 \\ &\qquad 3x + 2y + u = 2400 \\ &\qquad x, y, t, u \geq 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*B*
0	t	−1	2	1	0	800
0	u	3	2	0	1	2400
		−6000	−8000	0	0	0

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*B*
8000	y	−1/2	1	1/2	0	400
0	u	4	0	−1	1	1600
		−10000	0	4000	0	3200000

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*B*
8000	y	0	1	3/8	1/8	600
6000	x	1	0	−1/4	1/4	400
		0	0	1500	2500	7200000

El problema té solució òptima única. El punt (400, 600) és el màxim global. I el valor del punt a la funció objectiu és 7200000.

35. L'empresa EPC fabrica dos tipus de telèfons mòbils: T-truc i T-Call.. Ambdós productes necessiten mà d'obra d'electrònica i de muntatge. Cada T-Truc necessita 4 hores de treball en electrònica i 2 en muntatge. Cada T-Call, 3 i 1 hores, respectivament. Actualment, es disposa de 240 hores en el departament d'electrònica i de 100 al de muntatge. La producció s'organitza tenint en compte la restricció que el nombre de T-Calls, com a molt, ha de representar el 85% de la producció total. Cada T-Truc suposa un benefici net de 8 euros i cada T-Call, 5 euros. Es desitja determinar la millor combinació d'ambdós productes per tal de maximitzar el benefici total.

Nota: Malgrat que les variables prenen valors enters, considerarem que les variables prenen valors reals a fi i efecte de poder aplicar l'algoritme del símplex.

Considerem:
x = nre. de T-Truc
y = nre. de T-Call

	T-Truc	T-Call	Total
Electrònica	4	3	240
Muntatge	2	1	100

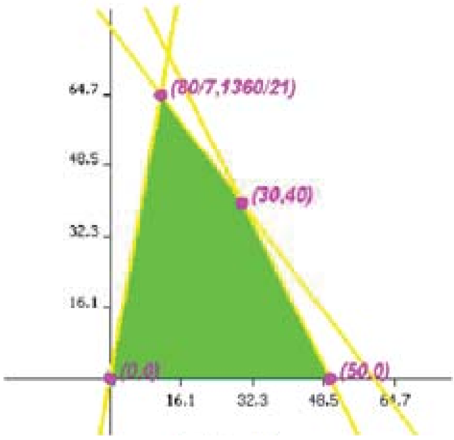
Volem maximitzar la funció de benefici:

$$\begin{aligned} Max \quad & 8x+5y \\ s.a. \quad & 4x+3y \le 240 \\ & 2x+y \le 100 \\ & y \le 0'85(x+y) \\ & x,y \ge 0 \end{aligned}$$

Es demana:

a) Calculeu tots els vèrtexs que delimiten la regió de solucions possibles. Calculeu el valor de la funció objectiu en cadascun d'aquests.

$$\begin{aligned} Max \quad & 8x+5y \\ s.a. \quad & 4x+3y \le 240 \\ & 2x+y \le 100 \\ & y \le 0'85(x+y) \\ & x,y \ge 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} Max \quad & 8x+5y \\ s.a. \quad & 4x+3y \le 240 \\ & 2x+y \le 100 \\ & -0'85x+0'15y \le 0 \\ & x,y \ge 0 \end{aligned}$$



Imatge 42

(x, y)	$(0, 0)$	$(50, 0)$	$(30, 40)$	$(80/7, 1360/21)$
$F(x, y)$	0	400	440	$8720/21 \approx 415{,}24$

b) Apliqueu el mètode del símplex per trobar l'òptim. Expliqueu de quin tipus és la solució que heu obtingut.

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} &Max \quad 8x+5y+0t+0u+0v \\ &s.a. \quad 4x+3y+t=240 \\ &\qquad 2x+y+u=100 \\ &\qquad 0'85x-0'15y+v=0 \\ &\qquad x,y,t,u,v\geq 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*v*	*B*
0	t	4	3	1	0	0	240
0	u	2	1	0	1	0	100
0	v	−17/20	3/20	0	0	1	0
		−8	−5	0	0	0	0

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*v*	*B*
0	t	0	1	1	−2	0	40
8	x	1	1/2	0	1/2	0	50
0	v	0	23/40	0	17/40	1	85/20
		0	−1	0	4	0	400

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*v*	*B*
5	y	0	1	1	−2	0	40
8	x	1	0	−1/2	3/2	0	30
0	v	0	0	−23/40	63/40	1	39/2
		0	0	1	2	0	440

El problema té solució òptima única. El punt (30, 40) és el màxim global. I el valor del punt a la funció objectiu és 440.

c) Relacioneu les taules de l'apartat anterior amb els vèrtexs obtinguts del primer apartat i comenteu-ne els resultats.

A les taules surten alguns dels vèrtexs de l'apartat *a)* i també el valor de *f(x,y)*.

36. Un sastre té 80 m^2 de cotó i 120 m^2 de teixit de llana. Un vestit d'home requereix 1 m^2 de cotó i 3 m^2 de llana, i un vestit de dona requereix 2 m^2 de cadascun dels teixits. Calculeu el nombre de vestits d'home i de dona que ha de confeccionar per maximitzar els ingressos si ambdós vestits es venen al mateix preu de dues unitats monetàries. Quin seria l'ingrés si pogués disposar de 12 m^2 addicionals de cotó? I si fossin 12 m^2 de llana?

Considerem:

x = nre. de vestits d'home
y = nre. de vestits de dona

	Vestit d'home (x)	Vestit de dona (y)	Total
Cotó	1	2	80
Llana	3	2	120

Volem maximitzar la funció d'ingrés:

$$\begin{aligned} Max \quad & 2x+2y \\ s.a. \quad & x+2y \le 80 \\ & 3x+2y \le 120 \\ & x,y \ge 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} Max \quad & 2x+2y+0t+0u \\ s.a. \quad & x+2y+t=80 \\ & 3x+2y+u=120 \\ & x,y,t,u \ge 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*B*
0	t	1	2	1	0	80
0	u	3	2	0	1	120
		−2	−2	0	0	0
Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*B*
0	t	0	4/3	1	−1/3	40
2	x	1	2/3	0	1/3	40
		0	−2/3	0	2/3	80
Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*B*
2	y	0	1	3/4	−1/4	30
2	x	1	0	−1/2	1/2	20
		0	0	1/2	1/2	100

El problema té solució òptima única. El punt $(20, 30)$ és el màxim global. I el valor del punt a la funció objectiu és de 100. Per tant, per maximitzar els ingressos s'hauran de confeccionar 20 vestits d'home i 30 vestits de dona.

Quin seria l'ingrés si pogués disposar de 12 m^2 addicionals de cotó? I si fossin 12 m^2 de llana?

Si disposéssim de 12 m^2 addicionals de cotó:

Abans | Ara

$$\begin{array}{ll} Max & 2x+2y \\ s.a. & x+2y \le 80 \\ & 3x+2y \le 120 \\ & x,y \ge 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} Max & 2x+2y \\ s.a. & x+2y \le 92 \\ & 3x+2y \le 120 \\ & x,y \ge 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 2\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

La variació de f serà: $\Delta f(x) = \lambda_1 \cdot \Delta b_1 = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6$

Per tant, l'ingrés serà $f(20{,}30) + \Delta f(x) = 100 + 6 = 106$ u.m.

Si disposéssim de 12 m^2 addicionals de llana:

Abans | Ara

$$\begin{array}{ll} Max & 2x+2y \\ s.a. & x+2y \le 80 \\ & 3x+2y \le 120 \\ & x,y \ge 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} Max & 2x+2y \\ s.a. & x+2y \le 80 \\ & 3x+2y \le 132 \\ & x,y \ge 0 \end{array}$$

$$\lambda_2 = 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

La variació de f serà: $\Delta f(x) = \lambda_2 \cdot \Delta b_2 = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6$

Per tant, l'ingrés serà $f(20{,}30) + \Delta f(x) = 100 + 6 = 106$ u.m.

37. Un pagès barreja moresc, farina de peix i pinso per crear una dieta per alimentar les seves aus. La dieta ha de contenir, almenys, 3 u. de ferro i 4 u. de vitamines; cada quilo de moresc dóna 2,5 u. de ferro i 1 u. de vitamines; cada quilo de farina de peix, 3 de ferro i 3 de vitamines; i cada quilo de cert pinso, 1 de ferro i 2 de vitamines. Els preus són de 20,30 i 16 u.m. per quilogram, respectivament. Quines quantitats de cada producte s'han de barrejar per a una dieta que minimitzi els costos?

Considerem:

x = kg de moresc

y = kg de farina de peix

z = kg de pinso sintètic

	Kg de moresc (x)	Kg de farina de peix (y)	Kg de pinso (z)	Total
Ferro	2,5	3	1	3
Vitamines	1	3	2	4

Volem minimitzar la funció costos:

$$\begin{aligned} &Min \quad 20x+30y+16z \\ &s.a. \quad 2'5x+3y+z \geq 3 \\ &\qquad x+3y+2z \geq 4 \\ &\qquad x,y,z \geq 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} &Max \quad -20x-30y-16z+0t+0u-wc-wd \\ &s.a. \quad 2'5x+3y+z-t+c=3 \\ &\qquad x+3y+2z-u+d=4 \\ &\qquad x,y,z,t,u,c,d \geq 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	x	y	z	t	u	c	d	B
−w	c	5/2	3	1	−1	0	1	0	3
−w	d	1	3	2	0	−1	0	1	4
		−7/2w+20	−6w+30	−3w+16	w	w	0	0	−7w

Coef	*v.b.*	x	y	z	t	u	c	d	B
−30	y	5/6	1	1/3	−1/3	0	1/3	0	1
−w	d	−3/2	0	1	1	−1	−1	1	1
		3/2w−5	0	−w+6	−w+10	w	2w−10	0	−w−30

Coef	*v.b.*	x	y	z	t	u	c	d	B
−30	y	4/3	1	0	−2/3	1/3	2/3	−1/3	2/3
−16	z	−3/2	0	1	1	−1	−1	1	1
		4	0	0	4	6	w−4	w−6	−36

El problema té solució òptima única. El punt $\left(0,\frac{2}{3},1\right)$ és el mínim global. I el valor del punt a la funció objectiu és 36. Per tant, per tal de minimitzar costos haurem de prendre 0 kg de moresc, 2/3 kg de farina de peix i 1kg de pinso.

Quin és el cost marginal de cada unitat de vitamines? Quin és el cost marginal de cada unitat de ferro?

Cost marginal de cada unitat de vitamines serà d 4 u.m. més:

$$\lambda_1 = -\left(-30\cdot\frac{2}{3}-16\cdot(-1)\right)=4$$

Cost marginal de cada unitat de ferro serà de 6 u.m. més:

$$\lambda_2 = -\left(-30\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - 16\cdot 1\right) = 6$$

38. Un client d'un banc disposa de 30.000 euros per adquirir fons d'inversió. El banc li ofereix dos tipus de fons, *A* i *B*. El del tipus *A* té una rendibilitat del 12% i unes limitacions legals de 12.000 euros d'inversió màxima. El de tipus *B* presenta una rendibilitat del 8% sense cap limitació. A més, per tal de diversificar el risc, el client vol invertir en el fons del tipus *B*, com a màxim, el doble de l'invertit en el del tipus *A*. Quines quantitats ha de col·locar en cada fons per tal de maximitzar els beneficis totals?

Considerem:

x = euros invertits al fons *A*

y = euros invertits al fons *B*

Volem maximitzar els beneficis totals: (*)

$$\begin{aligned} Max \quad & 0{,}12x + 0{,}08y \\ s.a. \quad & x + y = 30000 \\ & x \le 12000 \\ & y \le 2x \\ & x, y \ge 0 \end{aligned}$$

(*)Nota: Considerem que hem d'invertir els 30000 euros íntegrament.

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} Max \quad & 0{,}12x + 0{,}08y + 0t + 0u - wc \\ s.a. \quad & x + y + c = 30000 \\ & x + t = 12000 \\ & -2x + y + u = 0 \\ & x, y, t, u, c \ge 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	v.b.	x	y	t	u	c	B
−w	c	1	1	0	0	1	30000
0	t	1	0	1	0	0	12000
0	u	−2	1	0	1	0	0
		−w−3/25	−w−2/25	0	0	0	−30000w

Coef	v.b.	x	y	t	u	c	B
−w	c	0	1	-1	0	1	18000
3/25	x	1	0	1	0	0	12000
0	u	0	1	2	1	0	24000
		0	−w	w+3/25	0	0	−18000w+1440

Coef	v.b.	x	y	t	u	c	B
2/25	y	0	1	−1	0	1	18000
3/25	x	1	0	1	0	0	12000
0	u	0	0	3	1	−1	6000
		0	0	1/25	0	2/25	2880

El problema té solució òptima única. El punt (12000, 18000) és el màxim global. I el valor del punt a la funció objectiu és 2880. Per tant, per tal de maximitzar els beneficis haurem d'invertir 12.000 euros al fons *A* i 18.000 euros al fons *B*.

39. Una empresa disposa de 1.000 tones del mineral *A*, 2.000 tones del mineral *B* i 500 tones del mineral C. A partir d'aquests minerals, s'elaboren els productes x_1, x_2, x_3. L'empresa desitja determinar la quantitat que ha de fabricar de cada producte, a partir dels minerals aprofitables, a fi i efecte d'obtenir el màxim de profit de l'operació. Cal tenir en compte que per elaborar una tona de producte x_1 es necessiten 5 tones de *A*, 10 de *B* i 10 tones de C. Cada tona del producte x_2 necessita 5 tones de *A*, 8 de *B* i 5 de C. Finalment, utilitzarem 10 tones de *A*, 5 de *B* i cap de C per a cada tona de x_3. El fabricant obtindrà 100 euros de benefici per tona del producte x_1, 200 per tona de x_2 i 50 euros per tona de x_3. Determineu les quantitats a fabricar de cadascun dels productes per tal de maximitzar el benefici. De quin tipus és la solució que heu obtingut?

Considerem:

x = Tones de producte x_1.

y = Tones de producte x_2.

z = Tones de producte x_3.

	Producte x_1 (x)	Producte x_2 (y)	Producte x_3 (z)	Total
Mineral *A*	5	5	10	1000
Mineral *B*	10	8	5	2000
Mineral C	10	5	0	500

Volem maximitzar el benefici:

$$\begin{aligned} &Max \quad 100x + 200y + 50z \\ &s.a. \quad 5x + 10y + 10z \le 1000 \\ &\qquad 5x + 8y + 5z \le 2000 \\ &\qquad 10x + 5y \le 500 \\ &\qquad x, y, z \ge 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} &Max \quad 100x + 200y + 50z + 0t + 0u + 0v \\ &s.a. \quad 5x + 10y + 10z + t = 1000 \\ &\qquad 5x + 8y + 5z + u = 2000 \\ &\qquad 10x + 5y + v = 500 \\ &\qquad x, y, z, t, u, v \ge 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*v*	*B*
0	t	5	5	10	1	0	0	1000
0	u	10	8	5	0	1	0	2000
0	v	10	5	0	0	0	1	500
		−100	−200	−50	0	0	0	0

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*v*	*B*
0	y	−5	0	10	1	0	−1	500
0	u	−6	0	5	0	1	−8/5	1200
200	v	2	1	0	0	0	1/5	100
		300	0	−50	0	0	40	20000

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*v*	*B*
50	*z*	−1/2	0	1	1/10	0	−1/10	50
0	u	−7/2	0	0	−1/2	1	−11/10	950
200	y	2	1	0	0	0	1/5	100
		275	0	0	5	0	35	22500

De quin tipus és la solució que heu obtingut?

El problema té solució òptima única. El punt (0, 100, 50) és el màxim. I el valor del punt a la funció objectiu és 22500. Per tant, per tal de maximitzar el benefici haurem de fabricar 0 tones de producte x_1, 100 tones de producte x_2, 50 tones de producte x_3.

40. El fabricant de joguines TOYOT produeix dos tipus de joguines: soldadets i trens. Un soldadet es ven a 27 euros i un tren a 21 euros. La matèria primera per fer un soldadet costa 10 euros i per fer un tren 9 euros. Cada soldadet fabricat repercuteix en 14 euros sobre els costos en concepte de mà d'obra i de costos generals. Per al cas dels trens aquesta repercussió és de 10 euros. En la factoria hi ha dues seccions: fusteria i acabats. Cada soldadet necessita 42 minuts de feina de fusteria i 105 minuts d'acabats. En canvi, cada tren necessita 90 minuts de fusteria i 75 minuts d'acabats. Atès el nombre de treballadors que hi ha contractats actualment en la fàbrica, l'empresa TOYOT calcula que setmanalment disposa, com a molt, de 80 hores de fusteria i de 100 hores d'acabats. Actualment el mercat només és capaç d'absorbir, com a molt, 40 soldadets cada setmana. TOYOT vol organitzar la seva producció per tal de maximitzar el benefici total.

Considerem:

x = nre. de soldadets

y = nre. de trens

	Soldadets (x)	Trens (y)	Total
Fusteria	42	90	4800
Acabats	105	75	6000

Beneficis unitaris:

		Soldadets	*Trens*
Ingressos		27	21
Costos	Matèria primera	10	9
	Mà d'obra i costos generals	14	10
Benefici		3	2

Volem maximitzar la funció beneficis:

$$\begin{aligned} Max \quad & 3x + 2y \\ s.a. \quad & 42x + 90y \le 4800 \\ & 105x + 75y \le 6000 \\ & x \le 40 \\ & x, y \ge 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} Max \quad & 3x + 2y + 0t + 0u \\ s.a. \quad & 42x + 90y + t = 4800 \\ & 105x + 75y + u = 6000 \\ & x + v = 40 \\ & x, y, t, u \ge 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*v*	*B*
0	t	42	90	1	0	0	4800
0	u	105	75	0	0	0	6000
0	v	1	0	0	1	1	40
		–3	–2	0	0	0	0

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*v*	*B*
0	t	0	90	1	0	–42	3120
0	u	0	75	0	1	–105	1800
3	x	1	0	0	0	1	40
		0	–2	0	0	3	120

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*t*	*u*	*v*	*B*
0	t	0	0	1	–6/5	84	960
2	y	0	1	0	1/75	–7/5	24
3	x	1	0	0	0	1	40
		0	0	0	2/75	1/5	168

El problema té solució òptima única. El punt (40, 24) és el màxim global. I el valor del punt a la funció objectiu és 1200/7. Per tant, per tal de maximitzar el benefici haurem de fabricar 57 soldadets i cap tren.

41. L'empresa PIPASA fabrica dos tipus de tabac per a pipa: mentolat i aromatitzat, i barreja tres varietats de fulles de tabac, anomenades *A*, *B* i *C*. Les disposicions duaneres vigents limiten la nostra importació de la varietat *A* a un màxim de 24.000 kg. Cada quilo de tabac tipus mentolat conté 0,3 kg de fulles *A*, mentre que el tipus aromatitzat en porta 0,2 kg (la resta de ssubstàncies fins a fer un quilo de tabac no són rellevants en aquest problema). Pel que fa a la varietat de fulla *B*, cada quilo de tabac mentolat i aromatitzat conté, respectivament, 0,2 kg i 0,3 kg. L'empresa disposa d'un màxim de 30.000 kg d'aquesta varietat de fulla. Finalment, en relació amb les fulles tipus *C*, en disposarem d'un màxim de 14.500 kg, i cada quilo del tipus de tabac mentolat i aromatitzat conté 0,2 kg i 0,1 kg de fulla *C*, respectivament. El benefici que obté PIPASA per cada quilo de mentolat és de 350 euros, i per a l'aromatitzat és de 300 euros. Volem decidir quants quilograms de cada tipus de tabac hem de produir a fi i efecte de maximitzar el benefici total. El model que resulta és:

$$\begin{aligned} &Max \quad 350x_1 + 300x_2 \\ &s.a. \quad 0'3x_1 + 0'2x_2 \leq 24000 \\ &\qquad 0'2x_1 + 0'3x_2 \leq 30000 \\ &\qquad 0'2x_1 + 0'1x_2 \leq 14500 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

on x_1 i x_2 representen els quilos de tabac mentolat i aromatitzat produïts, respectivament.

Es demana:

Per què no és possible fabricar 33.750 kg de tabac mentolat i 77.500 kg de tabac aromatitzat?

Vegem si compleix les restriccions:

$x_1 = 33750 \qquad \text{i} \qquad x_2 = 77500$

$$\begin{aligned} &0{,}3 \cdot 33750 + 0{,}2 \cdot 77500 \leq 24000 &&\qquad 25625 \leq 24000 \\ &0{,}2 \cdot 33750 + 0{,}3 \cdot 77500 \leq 30000 &\rightarrow &\qquad 30000 \leq 30000 \\ &0{,}2 \cdot 33750 + 0{,}1 \cdot 77500 \leq 14500 &&\qquad 14500 \leq 14500 \\ &\quad 33750\,,\, 77500 \geq 0 &&\qquad 33750\,,\, 77500 \geq 0 \end{aligned}$$

Com que no compleix totes les restriccions, el punt no pertany a la regió admissible.

Després de fer algunes iteracions, s'ha obtingut la taula següent:

	c_j	350	300	0	0	0	
c_b	B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
300	x_2	0	1	20	0	-30	α
0	s_2	0	0	-4	1	5	6500
350	x_1	1	0	-10	0	20	50000
		0	0	2500	0	β	γ

en la qual s'han perdut el valor d'algunes caselles. Deduïu raonadament el valor d'aquestes caselles. [Nota: No es demana que plantegeu la taula inicial i feu iteracions!]

Per determinar el valor de β:

$$\beta = 300 \cdot (-30) + 0 \cdot 5 + 350 \cdot 20 - 0 = -2000$$

Per determinar el valor de α:

Sabem que en la columna *b* hi ha d'haver un vèrtex de la regió admissible. Per tant, ha de complir almenys dues de les restriccions amb igualtat.

Sabem $x_1 = 50000$, $x_2 = ?$

$$\begin{array}{lcl} 0,3 \cdot 50000 + 0,2x_2 = 24000 & & x_2 = 45000 \\ 0,2 \cdot 50000 + 0,3x_2 = 30000 & \rightarrow & x_2 = 66666,\widehat{6} \\ 0,2 \cdot 50000 + 0,1x_2 = 14500 & & x_2 = 45000 \end{array}$$

Llavors, $\alpha = 45000$

Per determinar el valor de γ:

$$\gamma = 300 \cdot 45000 + 0 \cdot 6500 + 350 \cdot 50000 = 31000000$$

Una vegada obtingueu els valors perduts, raoneu si la taula és òptima o no ho és. En el cas que no ho sigui, realitzeu les iteracions escaients a fi i efecte de calcular la taula òptima.

La taula no és òptima, ja que hi ha almenys un nombre negatiu en l'última fila; per tant, no compleix la condició de detenció.

	c_j	350	300	0	0	0	
c_b	B	x_1	x_2	s_2	s_2	s_3	b
300	x_2	0	1	20	0	-30	45000
0	s_2	0	0	-4	1	5	6500
350	x_1	1	0	-10	0	20	50000
	0	0	0	2500	0	-2000	31000000

	c_j	350	300	0	0	0	
c_b	B	x_1	x_2	s_2	s_2	s_3	b
300	x_2	0	1	-4	6	0	84000
0	s_3	0	0	$-4/5$	1/5	1	1300
350	x_1	1	0	6	-4	0	24000
	0	0	0	900	400	0	33600000

42. Una fàbrica produeix tres tipus de mobles (A, B i C) a base de plàstics i fusta. Es disposa setmanalment de 600 kg de plàstic i 300 kg de fusta. La despesa de recursos per unitat fabricada i el benefici unitari es mostren al quadre següent:

	Moble A (x)	*Moble B (y)*	*Moble C (z)*	*TOTAL*
Plàstic	6	1	4	600
Fusta	2	4	3	300
Benefici (euros)	8	6	3	

A més a més, les instal·lacions no permeten produir més unitats de A que de B. Determineu el nivell de producció òptim setmanal que maximitza el benefici.

Considerem:
x = nre. de mobles del tipus A.
y = nre. de mobles del tipus B.
z = nre. de mobles del tipus C.

Volem maximitzar la funció beneficis:

$$\begin{aligned} &Max \quad 8x+6y+3z \\ &s.a. \quad 6x+y+4z \le 600 \\ &\qquad 2x+4y+3z \le 300 \\ &\qquad x \le y \\ &\qquad x, y \ge 0 \end{aligned}$$

El programa estandarditzat:

$$\begin{aligned} &Max \quad 8x+6y+3z+0t+0u+0v \\ &s.a. \quad 6x+y+4z+t=600 \\ &\qquad 2x+4y+3z+u=300 \\ &\qquad x-y+v=0 \\ &\qquad x, y, z, t, u, v \ge 0 \end{aligned}$$

Apliquem l'algoritme del símplex:

Coef	*v.b.*	x	y	z	t	u	v	B
0	t	6	1	4	1	0	0	600
0	u	2	4	3	0	1	0	300
0	v	1	−1	0	0	0	1	0
		−8	−6	−3	0	0	0	0

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	v	B
0	t	0	7	4	1	0	−6	600
0	u	0	6	3	0	1	−2	300
8	x	1	−1	0	0	0	1	0
		0	−14	−3	0	0	8	0

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	v	B
0	t	0	0	1/2	1	−7/6	−11/3	250
6	y	0	1	1/2	0	1/6	−1/3	50
8	x	1	0	1/2	0	1/6	2/3	50
		0	0	4	0	7/3	10/3	700

El problema té solució òptima única. El punt (50, 50, 0) és el màxim global. I el valor del punt a la funció objectiu és 700. Per tant, per tal de maximitzar el benefici haurem de fabricar 50 mobles del tipus *A*, 50 mobles del tipus *B* i cap del tipus *C*.

Quin preu estaríeu disposats a pagar per 10 kg addicionals de plàstic? I per 6 kg de fusta?

Si disposéssim de 10 kg addicionals de plàstic:

Abans — Ara

$$\begin{array}{ll} Max & 8x+6y+3z \\ s.a. & 6x+y+4z \le 600 \\ & 2x+4y+3z \le 300 \\ & x \le y \\ & x, y \ge 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} Max & 8x+6y+3z \\ s.a. & 6x+y+4z \le 610 \\ & 2x+4y+3z \le 300 \\ & x \le y \\ & x, y \ge 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 0 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0$$

La variació de *f* serà: $\Delta f(x) = \lambda_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot 10 = 0$

Per tant, el benefici serà $f(50,50,0) + \Delta f(x) = 700 + 0 = 700$ u.m.

No estaríem disposats a pagar cap preu per 10 kg addicionals de plàstic, ja que no ens repercuteix cap benefici extra.

Si disposéssim de 6 kg addicionals de fusta:

Abans		Ara
$$\begin{aligned} Max\quad & 8x+6y+3z \\ s.a.\quad & 6x+y+4z \le 600 \\ & 2x+4y+3z \le 300 \\ & x \le y \\ & x, y \ge 0 \end{aligned}$$	$\Rightarrow$	$$\begin{aligned} Max\quad & 8x+6y+3z \\ s.a.\quad & 6x+y+4z \le 600 \\ & 2x+4y+3z \le 306 \\ & x \le y \\ & x, y \ge 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = 0\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)+6\cdot\frac{1}{6}+8\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{3}$$

La variació de *f* serà: $\Delta f(x)=\lambda_2\cdot\Delta b_2=\frac{7}{3}\cdot 6=14$

Per tant, el benefici serà $f(50{,}50{,}0)+\Delta f(x)=700+14=714$ u.m.

Estaríem disposats a pagar com a màxim 14 u.m. més pels 6 kg de fusta addicionals.

Exercicis del tema 6: Successions i sèries de nombres reals

43. Estudieu l'expressió del terme general de les successions següents:

a) $\{1,3,5,7,\ldots\}$ $\quad a_n = 2n - 1$

b) $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots\right\}$ $\quad a_n = \dfrac{1}{2n-1}$

c) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots\right\}$ $\quad a_n = \dfrac{n}{2n+1}$

d) $\left\{\frac{3}{4}, 1, \frac{7}{6}, \frac{9}{7}, \frac{11}{8}, \ldots\right\}$ $\quad a_n = \dfrac{2n+1}{3+n}$

e) $\{1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1\ldots\}$ $\quad a_n = (-1)^{n+1}$ (es pot expressar d'altres maneres).

44. Considereu la successió $\{a_n\} = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}\right\}_{n\geq 1} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$. Justifiqueu que $\{a_n\}$ és una progressió (successió) geomètrica i doneu la seva raó. Calculeu:

Justificació de per què és una progressió geomètrica:

$\{a_n\} = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}\right\}_{n\geq 1} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$. Observem que passem d'un terme a l'altre multiplicant per $-\frac{1}{2}$. A més, la successió es pot expressar com a $\{a_n\} = a \cdot r^n$. La raó és $r = -\frac{1}{2}$.

$$\{a_n\} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$a)\ \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1-\frac{1}{1024}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{3}{2}} = \frac{2046}{3072} = \frac{341}{512}$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1-0}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$c)\ \sum_{n=11}^{\infty} a_n = \sum_{n=11}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{1024}-0}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{1024}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3072} = \frac{1}{1536}$$

45. Considereu la successió donada per:

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{9},\ a_3 = \frac{1}{27},\ a_4 = \frac{1}{81},\ \ldots$$

Quin tipus de successió és? És una progressió geomètrica. Quin és el seu terme general?

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Estudieu la convergència de la successió.
És convergent, ja que és una progressió geomètrica de raó $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$.

Veiem que es compleix el teorema $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

Calculeu la suma de la sèrie $\sum a_n$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}-0}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

A partir de la successió anterior, definim la nova successió donada per

$$b_1 = a_1 - a_2,\quad b_2 = a_2 - a_3,\quad b_3 = a_3 - a_4,\quad b_4 = a_4 - a_5, \ldots$$

Per tant, serà la successió:

$$\{b_n\} = \left\{\frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \frac{2}{243}, \ldots\right\}$$

$$b_1 = a_1 - a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}\ , \ b_2 = a_2 - a_3 = \frac{1}{9} - \frac{1}{27} = \frac{2}{27}\ , \ b_3 = a_3 - a_2 = \frac{1}{27} - \frac{1}{81} = \frac{2}{81}$$

$$b_4 = a_4 - a_3 = \frac{1}{81} - \frac{1}{243} = \frac{2}{243}, \ldots\ldots$$

$\{b_n\}_{n\in N}$ és una progressió geomètrica $\{b_n\} = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

A partir dels resultats anteriors, estudieu la convergència de la sèrie $\sum b_n$.

Nota: Recordeu que si $\sum a_n$ és convergent, $\sum ka_n = k\sum a_n$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{(1)}{=} \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{(2)}{=} \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

(1) Utilitzant la propietat anterior.
(2) per a l'apartat *c*).
Observem que no ha fet falta efectuar cap càlcul de límit.

46. Considereu la sèrie $\sum a_n$, de la qual es coneix la successió de les sumes parcials $S_n = \dfrac{5n^2 + 9n}{2(n+1)(n+2)}$.

Calculeu el terme general de la successió $\{a_n\}$.
Sabem que:

$$\left\{\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} &= a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{n-1} \end{aligned}\right\} \text{ si els restem obtenim: } S_n - S_{n-1} = a_n$$

Llavors:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{5n^2 + 9n}{2(n+1)(n+2)} - \left(\frac{5(n-1)^2 + 9(n-1)}{2\cdot n\cdot(n+1)}\right) = \frac{5n^2 + 9n}{2(n+1)(n+2)} - \left(\frac{5n^2 - 10n + 5 + 9n - 9}{2\cdot n\cdot(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{5n^2 + 9n}{2(n+1)(n+2)} - \left(\frac{5n^2 - n - 4}{2\cdot n\cdot(n+1)}\right) = \frac{5n^2 + 9n}{2(n+1)(n+2)} - \left(\frac{5n^2 - n - 4}{2\cdot n\cdot(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{n\cdot(5n^2 + 9n)}{2\cdot n\cdot(n+1)(n+2)} - \left(\frac{(n+2)(5n^2 - n - 4)}{2\cdot n\cdot(n+1)(n+2)}\right) = \frac{5n^3 + 9n^2}{2\cdot n\cdot(n+1)(n+2)} - \left(\frac{5n^3 + 9n^2 - 6n - 8)}{2\cdot n\cdot(n+1)(n+2)}\right) =$$

$$= \frac{6n + 8}{2\cdot n\cdot(n+1)(n+2)} = \frac{3n + 4}{n\cdot(n+1)(n+2)}$$

Calculeu la suma de la sèrie.

$$\sum a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+9n}{2(n+1)(n+2)} = \frac{5}{2}$$

47. Calculeu la suma de les sèries geomètriques següents:

$$a)\ \sum \frac{6}{10^n} = \sum 6\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n = 6\cdot\sum\left(\frac{1}{10}\right)^n = 6\cdot\frac{\frac{1}{10}-0}{1-\frac{1}{10}} = 6\cdot\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = 6\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

$$b)\ \sum \frac{4}{3^n} = \sum 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n = 4\cdot\sum\left(\frac{1}{3}\right)^n = 4\cdot\frac{\frac{1}{3}-0}{1-\frac{1}{3}} = 4\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$$

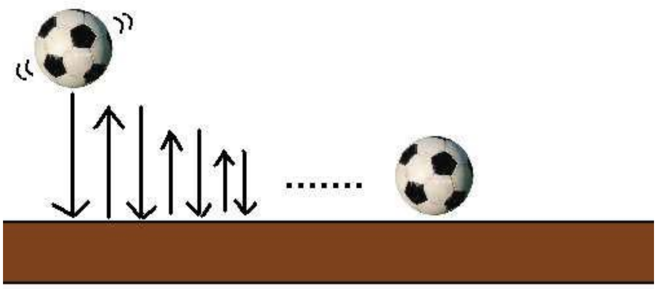
$$c)\ \sum\left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{-\frac{1}{5}-0}{1+\frac{1}{5}} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{6}{5}} = -\frac{1}{6}$$

$$d)\ \sum\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{-\frac{2}{3}-0}{1+\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{2}{5}$$

$$e)\ \sum \frac{(-2)^n}{3^{n+1}} = \sum \frac{(-2)^n}{3\cdot 3^n} = \sum \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\sum\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\cdot\frac{-\frac{2}{3}-0}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{15}$$

$$f)\ \sum \frac{2}{5^n} = 2\cdot\sum\frac{1}{5^n} = 2\cdot\sum\left(\frac{1}{5}\right)^n = 2\cdot\frac{\frac{1}{5}-0}{1-\frac{1}{5}} = 2\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

48. Es deixa caure una pilota des d'una altura de 6 metres i se li permet rebotar de manera indefinida. Quant recorrerà la pilota si sempre rebota el 80% de la seva altura anterior?



Imatge 43

Nota: Interpretem la distància recorreguda com la suma de les altures que recorre la pilota.

Per tant, serà la progressió geomètrica: $\{a_n\} = \{\, 6, 9'6\, , 6'78\, , 6'144\, ,....\}$

on $a_1 = 6$, $a_2 = 2 \cdot 6 \cdot 0'8 = 9'6$, $a_3 = 2 \cdot 6 \cdot (0'8)^2 = 6'78$,....,

Per tant $a_n = \begin{cases} 6 & n = 1 \\ 12 \cdot (0'8)^{n-1} & n \neq 1 \end{cases}$

La distància que recorrerà a partir del primer rebot serà la suma dels termes d'aquesta progressió geomètrica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 12 \cdot (0'8)^{n-1} - 1 = 6 + 12 \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} (0'8)^{n-1} = 6 + 12 \cdot \frac{0'8 - 0}{1 - 0'8} = 6 + 12 \cdot \frac{0'8}{0'2} = 54 \text{ metres}$$

49. Donada $a_n = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$, considereu la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Es demana:

a) Proveu que es tracta d'una sèrie geomètrica i doneu-ne la raó.

$$a_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

b) Calculeu $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ i doneu el valor de S_{10}.

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad ; \quad S_{10} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 2'33876...$$

c) Justifiqueu que la sèrie és convergent i calculeu la seva suma.

És una sèrie convergent, ja que és una progressió geomètrica de raó $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 0}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} + 1$$

50. Responeu les qüestions següents:

Justifiqueu que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{1+n}$ no és convergent.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{1+n} = 1 \neq 0$. Per tant, la sèrie no és convergent.

Justifiqueu que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{3}\right)^{1-n}$ és convergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{3}\right)^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^{n}} = \sqrt{3}\cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n}$$

És convergent, ja que és una progressió geomètrica de raó $\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| < 1$.

Calculeu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}-0}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}-0}{1-\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Bibliografia

Llibres

ALEGRE ESCOLANO, P.; BADÍA BATLLE, C.; SANCHO INSA, T. (1985). *Ejercicios resueltos de matemáticas empresariales*. Barcelona: Los autores.

ALEJANDRE MATEO, F.; VILELLA BACH, C.; LLERENA GARRÉS, F. (1995). *Problemes de matemàtiques per a econòmiques i empresarials*. Sant Cugat del Vallès: Edicions Media.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L.; ROSEN, K. H.; LEÓN CÁRDENAS, J. (2006). *Cálculo aplicado: Para administración, economía y ciencias sociales* (3ª ed.). Mèxic DF: McGraw Hill.

SYDSAETER, K.; HAMMOND, P. J. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Madrid: Prentice Hall.

AYRES, F.; MENDELSON, E. (1988). *Cálculo diferencial e integral* (2a ed.). Madrid: McGraw-Hill.

BARBOLLA, R., CERDÀ, E., & SANZ ÁLVARO, P. (2000). *Optimización: Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía*. Madrid: Prentice Hall.

BARANENKOV, G., & DEMIDOVICH, B. (1969). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Madrid: Paraninfo.

Adreces electròniques

Pàgina de recursos educatius d'en Jordi Lagarés Roset (TotiPM) Matemàtiques, from <http://www.xtec.cat/~jlagares/matemati.htm>

Wiris, la teva calculadora a la xarxa, from <http://www.wiris.net/demo/wiris/ca/index.html>

Geogebra, from <http://www.geogebra.org/cms/>

Imatges

Les següents imatges han estat obtingudes mitjançant els programes *Paint i Programació lineal para Windows*, de Jordi Lagarés.

Imatge 1, imatge 2, imatge 3, imatge 4, imatge 24, imatge 25, imatge 26, imatge 27, imatge 30, imatge 31, imatge 32, imatge 33, imatge 34, imatge 35, imatge 36, imatge 37, imatge 38, imatge 39, imatge 40, imatge 41, imatge 42.

Les imatges següents han estat obtingudes mitjançant el programa *Derive*.

Imatge 5, imatge 8, imatge 9, imatge 10, imatge 11, imatge 12, imatge 13, imatge 16, imatge 17, imatge 18, imatge 20, imatge 21, imatge 22, imatge 28.

Les següents imatges han estat obtingudes mitjançant un, o ambdòs, programes, concretament, el *Paint* i el soofware *Calculadora Wiris*:

Imatge 29

La imatge següent ha estat obtinguda mitjançant el programa *Geogebra*.

Imatge 15.

La imatge següent ha estat obtinguda del web: <http://www.esconatura.com/espeleologia-topografia.htm>

Imatge 7.

Les imatges següents han estat obtingudes a partir del cercador Google i modificades amb el programa *Paint*.

Imatge 6, imatge 14, imatge 19, imatge 23, imatge 43.

Exercicis

Els exercicis següents han estat extrets del llibre: Alegre Escolano, P.; Badía Batlle, C.; Sancho Insa, T. (1985). *Ejercicios resueltos de matemáticas empresariales*. Barcelona: Los autores.

Exercici 34 (*d*).

Els exercicis següents han estat extrets del llibre: Baranenkov, G.; Demidovich, B. (1969). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Madrid: Paraninfo.

Exercici 43 (*b*), (*e*).

Els exercicis següents han estat extrets del llibre: Alejandre Mateo, F.; Vilella Bach, C.; Llerena Garrés, F. (1995). *Problemes de matemàtiques per a econòmiques i empresarials*. Sant Cugat del Vallès: Edicions Media.

Exercici 20 (*a*), (*d*), (*e*), (*f*); exercici 25 (*a*), (*b*); exercici 34 (*b*).

Els exercicis següents han estat extrets del llibre: Barbolla, R.; Cerdà, E.; Sanz Álvaro, P. (2000). *Optimización: Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía*. Madrid: Prentice Hall.

Exercici 23, exercici 24 i exercici 32.

Aquest llibre pretén proporcionar coneixements i habilitats vinculades a les assignatures de matemàtiques dels estudis d'economia, empresa i finances. Ésser competent implica comprendre, reflexionar i decidir, en qualsevol situació vinculada en un saber. Per tant el procés de construcció i fortificació en l'etapa de l'aprenentatge són clau per assolir la capacitat d'aprendre a ser i actuar de manera autònoma. Així, durant el transcurs de la lectura d'aquestes pàgines, esperem donar suport a l'adquisició de nous conceptes i habilitats d'aquesta temàtica aparentment exacta i tant relativa a la vegada, les matemàtiques.

El més incomprensible del món
és que sigui comprensible.
Albert Einstein