11
Eina-e

Matemàtiques I

Economia i empresa

Llúcia Mauri Masdeu

[publicacions] urv

Matemàtiques I

Eina-e, 11

Edita:
Publicacions URV

1a edició: Juliol de 2012
ISBN: 978-84-695-3927-9
Dipòsit legal: T-936-2012

Publicacions de la Universitat Rovira i Virgili:
Av. Catalunya, 35 - 43002 Tarragona
Tel. 977 558 474
www.publicacionsurv.cat
publicacions@urv.cat

Matemàtiques I
Economia i empresa

Llúcia Mauri Masdeu

[publicacions] urv

Tarragona, 2012

Índex de continguts

Pròleg

Aquest llibre neix a la Facultat d'Economia i Empresa de la Universitat Rovira i Virgili, concretament dins i fora de les aules on s'imparteix l'assignatura de Matemàtiques I.

La idea era que l'alumnat disposés de material de suport per adquirir conceptes, procediments, i, naturalment, competències. A poc a poc, aquelles pàgines i aquells continguts, amb el dia a dia de l'aula, van anar donant forma al que trobareu tot seguit.

Així, doncs, sols resta agrair el suport a la meva família, als meus alumnes, a tot el personal del la Facultat d'Economia i Empresa de la URV i, especialment, a Norberto Màrquez, a Margarita Roselló i a Marta Ripollés, els quals m'han guiat desinteressadament en els meus primers passos en la docència.

Novembre 2011

TEORIA

Part 1: Àlgebra lineal

Tema 1: Matrius i determinants

1.1 Concepte de matriu. Operacions amb matrius

Concepte de matriu

Què és una matriu?

S'anomena *matriu* d'ordre *mxn*, l'ordenació de $m \cdot n$ nombres reals disposats en m files i n columnes. La denotarem com a $A = (a_{ij})_{mxn}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En aquest cas, a_{ij} són nombres reals i s'anomenen elements d'A.

Els subíndexs dels elements, és a dir, la i i la j, representen la fila i la columna respectivament on es troba l'element.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu A és d'ordre 2x3, atès que té dues files i tres columnes. L'element $a_{13}=-4$, ja que es troba a la fila 1 i a la columna 3.

Per a què serveix?

Sovint hem de representar algun tipus de valor que depèn de més d'una variable. Per exemple: comprem un bitllet de tren; podem suposar que el preu depèn alhora de l'estació on volem baixar i del tipus de tarifa aplicada a cada client.

Exemple: Una cadena de magatzems té 4 centres: C_1, C_2, C_3 i C_4, on es venen 3 productes diferents: F_1, F_2 i F_3. Per representar el benefici de les vendes en els diferents centres en funció dels diferents productes, utilitzarem una matriu.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 50 & 25 & 45 & 30 \\ 60 & 12 & 30 & 40 \\ 55 & 20 & 40 & 35 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \end{array}$$

Tipus de matrius

Matriu quadrada:

Anomenarem *matriu quadrada*, la matriu que té el mateix nombre de files que de columnes.

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 9 & -3 & 0 \\ 3 & 24 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrius A i C són quadrades perquè tenen el mateix nombre de files que de columnes.

S'anomena *diagonal principal* d'una matriu quadrada, els elements a_{11}, a_{22},..., a_{nn}.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 9 & -3 & 0 \\ 3 & 24 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriu simètrica:

Anomenarem *matriu simètrica* la matriu quadrada en què els elements que hi ha per sobre la diagonal principal són iguals als que hi ha per sota, és a dir, els elements $a_{ij} = a_{ji}$ per $i = 1, ..., n$ i $j = 1, ..., n$.

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 8 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Les matrius A i B són simètriques.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 8 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriu antisimètrica:

Anomenarem *matriu antisimètrica* la matriu quadrada en què els elements que hi ha per sobre la diagonal principal són els oposats als que hi ha per sota, és a dir, els elements $a_{ij} = -a_{ji}$ per $i = 1, \ldots, n$ i $j = 1, \ldots, n$. A més a més, els elements de la diagonal principal són nuls, és a dir, $a_{ii} = 0$ per $i = 1, \ldots, n$.

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -8 \\ -3 & 0 & 4 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrius A i B són antisimètriques.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -8 \\ -3 & 0 & 4 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriu transposada:

Anomenarem *matriu transposada*, i la denotarem per A^t, la matriu resultant d'intercanviar les files per les columnes o les columnes per les files, és a dir, si $A=(a_{ij})_{mxn}$ és una matriu, la seva matriu transposada és $A^t=(a_{ji})_{nxm}$.

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 9 & -3 & 0 \\ 3 & 24 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, les matrius transposades corresponents són:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 3 \\ 8 & -3 & 24 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriu inversa:

Anomenarem *matriu inversa* d'una matriu quadrada A aquella matriu tal que $A \cdot A^{-1} = I_n$, i la denotarem per A^{-1}. Aquesta matriu s'obté a partir de les operacions següents:

$$A^{-1} = \frac{A^c}{\det A}$$

On, *det A* indica el determinant de la matriu A, i A^c és la matriu complementària.

Matriu diagonal:

Anomenarem *matriu diagonal* la matriu en què tots els elements que no estan a la diagonal principal són nuls, és a dir, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ per a tot $i = 1, ..., n$ i $j = 1, ..., n$.

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriu escalar:

Anomenarem *matriu escalar* la matriu diagonal en què tots els elements de la diagonal principal són el mateix nombre, és a dir, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ i $a_{ii} = k$ per a tot $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$ i k un nombre real.

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Matriu triangular (superior o inferior):

Anomenarem *matriu triangular superior* la matriu quadrada en què els elements que hi ha per sota la diagonal principal són nuls, és a dir, $a_{ij} = 0$ si $i > j$ per a tot $i=1,\dots, n$ i $j=1, \dots, n$.

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Anomenarem *matriu triangular inferior* la matriu quadrada en què els elements que hi ha per sobre la diagonal principal són nuls, és a dir, $a_{ij} = 0$ si $i < j$ per a tot $i = 1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, n$.

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriu unitària o matriu identitat:

Anomenarem *matriu unitària* o *matriu identitat*, i la denotarem per I_n (on n és l'ordre de la matriu), la matriu diagonal en què tots els elements de la diagonal principal són 1. Aquesta matriu és un tipus de matriu escalar. És a dir, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ i $a_{ii} = 1$ per a tot $i = 1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, n$.

Exemples:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriu nul·la o matriu zero:

Anomenarem *matriu nul·la* o *matriu zero*, i la denotarem per 0_n (on n és l'ordre de la matriu), la matriu en què tots els elements són nuls, és a dir, $a_{ij}=0$ per a tot $i=1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, n$.

Exemples:

$$0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIU ORTOGONAL:

Anomenarem *matriu ortogonal* a tota matriu quadrada que compleix $A^{-1}=A^t$. Aquest tipus de matrius té la propietat que $\det A = \pm 1$.

SUBMATRIU D'UNA MATRIU:

Considerem la matriu $A=(a_{ij})_{mxn}$. Direm que *A'* és *submatriu* de *A* si està formada per una selecció de *k* files i *l* columnes de *A* en què $k<m$ i $l<n$.

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 9 & -3 & 0 \\ 3 & 24 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrius A' i B' són submatrius de A i de B respectivament.

VECTOR (FILA O COLUMNA):

Anomenem *vector fila* la matriu que té una fila i *n* columnes, és a dir, és una matriu d'ordre 1xn.

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1n} \end{pmatrix}$$

Anomenem *vector columna* la matriu que té *m* files i una columna, és a dir, és una matriu d'ordre mx1.

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ . \\ . \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Operacions amb matrius

Suma i resta de matrius

Considerem les matrius $A=(a_{ij})_{mxn}$ i $B=(b_{ij})_{mxn}$ d'ordre mxn.

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ b_{m1} & b_{m2} & . & . & . & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & . & . & . & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & . & . & . & a_{2n} \pm b_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & . & . & . & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Les matrius suma i resta són matrius d'ordre *mxn*.

Exemple:

Considerem la cadena de magatzems i les matrius dels beneficis generats al gener i al febrer. Volem saber el benefici total d'ambdós mesos; per tant, sumarem els beneficis de cada producte en els diferents centres.

$$A + B = \begin{pmatrix} 50 & 25 & 45 & 30 \\ 60 & 12 & 30 & 40 \\ 55 & 20 & 40 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 & 25 & 40 & 10 \\ 50 & 17 & 10 & 40 \\ 5 & 20 & 30 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 & 50 & 85 & 40 \\ 110 & 29 & 40 & 80 \\ 60 & 40 & 70 & 60 \end{pmatrix}$$

Ara considerem la matriu dels preus dels productes al gener i la matriu amb els diferents descomptes que es faran; per tant, restarem i obtindrem la matriu dels preus dels productes després d'aplicar els descomptes.

$$A - B = \begin{pmatrix} 50 & 25 & 45 & 30 \\ 60 & 12 & 30 & 40 \\ 55 & 20 & 40 & 35 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 & 15 \\ 10 & 7 & 3 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 23 & 35 & 15 \\ 50 & 5 & 27 & 30 \\ 50 & 12 & 37 & 30 \end{pmatrix}$$

Producte de matrius

Considerem les matrius $A=(a_{ij})_{mxn}$ i $B=(b_{ij})_{nxp}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2p} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & . & . & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + ... + a_{1n} \cdot b_{n1} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + ... + a_{1n} \cdot b_{n2} & . & . & . & a_{11} \cdot b_{1p} + a_{12} \cdot b_{2p} + ... + a_{1n} \cdot b_{np} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + ... + a_{2n} \cdot b_{n1} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + ... + a_{2n} \cdot b_{n2} & . & . & . & a_{21} \cdot b_{1p} + a_{22} \cdot b_{2p} + ... + a_{2n} \cdot b_{np} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + ... + a_{mn} \cdot b_{n1} & a_{m1} \cdot b_{12} + a_{m2} \cdot b_{22} + ... + a_{mn} \cdot b_{n2} & . & . & . & a_{m1} \cdot b_{1p} + a_{m2} \cdot b_{2p} + ... + a_{mn} \cdot b_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x4} = \begin{pmatrix} 12 & 31 & 13 & 14 \\ 9 & 20 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Important: El producte de matrius no és commutatiu. Si tenim dues matrius A i B

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Exemple:
Considerem dues matrius A i B:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 38 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -36 & -11 \\ -2 & -5 & -3 \\ 8 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

Per tant, $A \cdot B \neq B \cdot A$

Producte d'un escalar per una matriu

Considerem la matriu $A=(a_{ij})_{mxn}$ i un escalar k qualsevol.

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & . & . & . & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & . & . & . & k \cdot a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & . & . & . & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Potència d'una matriu

Considerem la matriu quadrada d'ordre m $A=(a_{ij})_{mxn}$.

Definim:

$$A^2 = A \cdot A \text{ , } \quad A^3 = A \cdot A \cdot A \text{ , ... , } \quad A^n = A \cdot ..... \cdot A \ (n \text{ vegades})$$

Exemple:

Considerem la matriu A i busquem A^2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ llavors } A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Propietats

1) $(A^t)^t=A$
2) $(A+B)^t= A^t + B^t$
3) $(k \cdot A)^t=\text{k} \cdot A^t$
4) $(A \cdot B)^t= B^t \cdot A^t$

5) Direm que una matriu quadrada és simètrica si $A = A^t$
6) Direm que una matriu quadrada és antisimètrica si $A = -A^t$
7) Dues matrius $A=(a_{ij})_{mxn}$ i $B=(b_{ij})_{mxn}$ són iguals quan llurs elements són iguals un a un, és a dir, $a_{ij} = b_{ij}$ per tot $i = 1, ..., m$ i $j = 1, ..., n$.

1.2 Determinant d'una matriu. Propietats dels determinants

Determinant d'una matriu

Què és?

El *determinant* és una funció que associa a cada matriu quadrada A un únic nombre real, i el denotarem per *det* A o $|A|$.

Molt important!: Per poder calcular el determinant d'una matriu, la matriu ha de ser quadrada.

Determinants de matrius d'ordre 1:

Si A és una matriu d'ordre 1, és a dir, del tipus $A=(a_{11})$, llavors el determinant d'A serà l'element en qüestió:

$$|A|=a_{11}$$

Exemple:
Sigui $A=(2)$ *llavors* $|A|=2$

Determinant de matrius d'ordre 2 i 3:

DETERMINAT DE MATRIUS D'ORDRE 2:

Sigui $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ llavors considerem $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

i el determinant de la matriu serà $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$

Exemples:
1) Sigui $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ volem calcular el seu determinant:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-4\cdot 5=6-20=-14$$

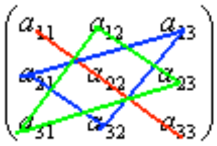
2) Sigui $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ volem calcular el seu determinant:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 1-(-4)\cdot 6=2+24=26$$

Determinat de matrius d'ordre 3 (regla de Sarrus):

Sigui $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

llavors considerem:

 i 

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

Exemple:

1) Sigui $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ volem calcular el seu determinant:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot 5 + 4\cdot 0\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot(-1)\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 0 - 4\cdot 2\cdot 5 = -45$$

2) Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ volem calcular el seu determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 6 + (-1)\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 4 - 2\cdot(-1)\cdot 3 - 4\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 6 = 0$$

Nocions prèvies

- Menor d'una matriu: és el determinant de qualsevol submatriu quadrada A' d'una matriu A.
- Menor complementari d'un element a_{ij}: és el determinant que s'obté després de suprimir la fila i-éssima i la columna j-éssima. El denotarem per M_{ij}.

Exemple:
Considerem: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Volem calcular els menors complementaris de a_{11} i a_{22}.

Calculem M_{11}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0 = 4$

Calculem M_{32}: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Per tant, $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 2 + 0 - 1 + 0 = -3$

- Adjunt de a_{ij}: és el menor complementari M_{ij} d'un element a_{ij} multiplicat per l'element $(-1)^{i+j}$. El denotarem per A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Exemple:

Considerem la matriu A de l'exemple anterior i els menors complementaris M_{11} i M_{32} ja calculats. Volem calcular A_{11} i A_{32}.

Calculem A_{11}: $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 = 4$

Calculem A_{32}: $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3) = 3$

- Matriu adjunta: és la matriu formada pels adjunts de a_{ij} d'una matriu A donada. La denotarem per $adj(A)$.

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & . & . & A_{2n} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ A_{n1} & A_{n2} & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & . & . & . & (-1)^{1+n} M_{1n} \\ -M_{21} & +M_{22} & . & . & . & (-1)^{2+n} M_{2n} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ (-1)^{n+1} M_{n1} & (-1)^{n+2} M_{n2} & . & . & . & (-1)^{n+n} M_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple:
Considerem la matriu A següent i en calcularem la matriu adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Com que és una matriu d'ordre 3, la matriu adjunta serà d'ordre 3:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Per tant, calcularem aquests adjunts:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 5 \\ -18 & 9 & 9 \\ 2 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

- Matriu complementària: és la matriu adjunta transposada i la denotarem per A^C.

$$A^C = (adj\ A)^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & . & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & . & A_{n2} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple:

Considerem la matriu A de l'exemple anterior. Hem obtingut la matriu adjunta següent:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 5 \\ -18 & 9 & 9 \\ 2 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu complementària és:

$$A^C = (adj\ A)^t = \begin{pmatrix} -5 & -18 & 2 \\ -10 & 9 & 4 \\ 5 & 9 & -11 \end{pmatrix}$$

Determinant de matrius d'orde n *superior a 3*

Sigui A una matriu d'ordre n. Per calcular el determinant d'aquesta matriu, procedirem de la següent manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1) Escollirem una fila o columna de la matriu A (preferiblement la fila o columna que contingui més zeros).

   Nota: Podem prendre qualsevol fila o columna.

2) Desenvoluparem el determinant de la matriu d'ordre n en suma de determinants d'ordre n−1. Aquest serà el producte dels elements de la fila o columna escollida pel adjunts corresponents.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} + ... + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & . & . & . & a_{2n-1} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_{n2} & . & . & . & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

3) Repetirem el procés successivament fins a obtenir determinants d'ordres que sapiguem calcular (d'ordre 3, 2 o 1).

Exemple:

1) Volem calcular el determinant de la matriu A d'ordre 4 següent. Fins ara sols sabem calcular determinants fins a ordre 3; per tant, reduirem el càlcul del determinant d'una matriu d'ordre 4 al càlcul de determinants d'ordre 3 de la manera següent:

Considerem: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Visualitzem la matriu: escollim una fila o una columna qualsevol. Per estalviar-nos càlculs, prendrem la fila o la columna en què hi hagi el nombre de zeros més gran possible.

Per exemple, prendrem la quarta columna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicarem la fórmula

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4}\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{4+4}\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4+3+3-4)-(-2+9-2) = 2-5 = -3$$

2) Volem calcular el determinant d'una matriu d'ordre 3 utilitzant aquest mètode. Després comprovarem que ens dóna el mateix resultat que amb el mètode de Sarrus. Considerem la matriu A que hem emprat anteriorment amb Sarrus.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Visualitzem la matriu A i observem que hi ha un 0; per tant, per simplificar els càlculs, prendrem la tercera columna o la segona fila.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Prenem la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 + 0 + 5\cdot(-11) = -45$$

Càlcul de la matriu inversa d'una matriu *A*

Podrem calcular la matriu inversa d'una matriu A, si la matriu és invertible, és a dir, si existeix una matriu A^{-1}, de manera que $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$.

Direm que una matriu A és regular si el determinant és diferent de zero ($\det A \neq 0$) i que una matriu és singular si el determinant és zero ($\det A = 0$).

Una matriu A serà invertible si i només si és regular. Per tant, per calcular la inversa d'una matriu A serà una condició necessària que el seu determinant sigui diferent de 0.

Recordem la definició de la matriu inversa:

$$A^{-1} = \frac{A^c}{|A|}$$

en què A^C és la matriu complementària de A i det $A=|A|$ és el determinant de la matriu A. La matriu inversa compleix la propietat següent: $A \cdot A^{-1} = I_n$.

Exemples:

1) Inversa d'una matriu d'ordre 2:

Primer comprovem que existeix la inversa d'aquesta matriu tot calculant el determinant i verificant que és diferent de 0.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = 6 - 20 = -14 \neq 0$$

Per tant, existeix la matriu inversa de A. Llavors, apliquem la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{A^C}{|A|} = \frac{A^C}{-14} = \frac{(adj\ A)^t}{-14} = \frac{1}{-14} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-14} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{14} & \frac{4}{14} \\ \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

Comprovem que hem fet bé els càlculs; si és així, la matriu A^{-1} ha de verificar $A \cdot A^{-1} = I_2$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Inversa d'una matriu d'ordre 3:

Primer comprovem que existeix la inversa d'aquesta matriu tot calculant el determinant i verificant que és diferent de 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 9 - 0 - 2 - 0 = 5 \neq 0$$

Per tant, existeix la matriu inversa de A. Llavors apliquem la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{A^C}{|A|}=\frac{A^C}{5}=\frac{(adj\ A)^t}{5}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}2&2\\1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&2\\0&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3&2\\0&1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&3\\1&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&3\\0&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0&3\\2&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\3&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0\\3&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-4&3&3\\3&-1&-1\\-6&7&2\end{pmatrix}^t=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4&3&-6\\3&-1&7\\3&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{6}{5}\\ \frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{7}{5}\\ \frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

Comprovem que hem fet bé els càlculs. Si és així, la matriu A^{-1} ha de verificar $A\cdot A^{-1}=I_3$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&2&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{6}{5}\\ \frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{7}{5}\\ \frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

3) Inversa d'una matriu d'ordre 4:

Primer comprovem que existeix la inversa d'aquesta matriu tot calculant el determinant i verificant que és diferent de 0.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\2&1&1&-1\\3&2&2&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1&0&3&1\\2&1&1&-1\\3&2&2&0\\0&1&-1&0\end{vmatrix}=-3\neq 0 \text{ (Per un exemple anterior)}$$

Per tant, existeix la matriu inversa de A. Llavors apliquem la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{A^C}{|A|}=\frac{A^C}{-3}=\frac{(adj\ A)^t}{-3}=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&2&0\\1&-1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&1&-1\\3&2&0\\0&-1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&1&-1\\3&2&0\\0&1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&1&1\\3&2&2\\0&1&-1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&3&1\\2&2&0\\1&-1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&3&1\\3&2&0\\0&-1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0&1\\3&2&0\\0&1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&3\\3&2&2\\0&1&-1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0&3&1\\1&1&-1\\1&-1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3&1\\2&1&-1\\0&-1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\0&1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0&3\\2&1&1\\0&1&-1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&3&1\\1&1&-1\\2&2&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&3&1\\2&1&-1\\3&2&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\3&2&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&3\\2&1&1\\3&2&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=$$

$$=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}4&-3&-3&2\\4&-3&-3&5\\-5&3&3&-4\\6&-6&-3&3\end{pmatrix}^t=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&4&-5&6\\-3&-3&3&-6\\-3&-3&3&-3\\2&5&-4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{5}{3}&-2\\1&1&-1&2\\1&1&-1&1\\-\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}&-1\end{pmatrix}$$

Comprovem que hem fet bé els càlculs. Si és així, la matriu A^{-1} ha de verificar $A\cdot A^{-1}=I_4$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\2&1&1&-1\\3&2&2&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{5}{3}&-2\\1&1&-1&2\\1&1&-1&1\\-\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Propietats dels determinants

P.1) El determinant d'una matriu A i el determinant de la seva transposada és el mateix, és a dir, $|A|=|A^t|$.

Exemple:

$$A=\begin{pmatrix}3&4&2\\2&-1&0\\3&1&5\end{pmatrix}\qquad A^t=\begin{pmatrix}3&2&3\\4&-1&1\\2&0&5\end{pmatrix}$$

$$|A|=-15+4+6-40=-45\qquad |A^t|=-15+4+6-40=-45$$

P.2) Si intercanviem dues files o dues columnes entre si, el determinant canvia de signe.

Exemple:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$|A| = -15+4+6-40=-45 \qquad |B| = -6+40+15-4=45$$

Si fem el procés unes quantes vegades, el signe canviarà tantes vegades com ho fem.

P.3) Si una matriu té almenys una fila o columna amb tots els elements 0, llavors el seu determinant és 0.

Exemple:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad |A|=0$$

P.4) Si una matriu té almenys dues files o columnes amb els elements iguals, llavors el seu determinant és 0.

Exemple:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 4\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad |A| = -3-12+8+12+3-8=0$$

P.5) Si tenim una matriu quadrada *A* d'ordre *n* i un escalar *k*, llavors es compleix la igualtat següent:

$$|k\cdot A| = k^n \cdot |A|$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{k} = 2 \qquad 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -15 + 4 + 6 - 40 = -45 \qquad |2 \cdot A| = -120 + 32 + 48 - 320 = -360$$

Per tant: $-360 = 2^3 \cdot (-45)$

P.6) La suma dels determinats de dues matrius iguals menys una fila o columna és igual al determinant de la matriu resultant de sumar ambdues files o columnes diferents i la resta d'elements iguals.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3 + 2 = 5 \quad |B| = 12 \quad |C| = 15 + 2 = 17 \quad \to \quad |A| + |B| = |C|$$

P.7) Si una fila o columna és combinació lineal d'altres files o columnes, llavors el determinat de la matriu és 0.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = -12 + 36 + 8 - 32 = 0$$

Si observem la matriu, podem comprovar que la tercera fila és fruit de multiplicar per 2 la primera fila i restar-hi la segona fila.

P.8) Si a una fila o columna d'una matriu A hi sumem una combinació lineal d'altres files o columnes de la matriu A, llavors el determinant d'ambdues matrius és el mateix.

Exemple:

Observem que la primera columna de la matriu B resulta de sumar a la primera columna de la matriu A les altres dues.

$$A=\begin{pmatrix}3&4&2\\2&1&0\\4&9&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}9&4&2\\3&1&0\\17&9&4\end{pmatrix}$$

$$|A|=12+36-8-32=8\qquad |B|=36+54-34-48=8$$

P.9) El producte dels determinants de dues matrius és el determinant del producte de dues matrius, és a dir, $|A|\cdot|B|=|A\cdot B|$.

Exemple:

$$A=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-3&-4\\0&1\end{pmatrix}\qquad A\cdot B=\begin{pmatrix}-6&-11\\3&5\end{pmatrix}$$

$$|A|=2-3=-1\qquad |B|=-3\qquad |A\cdot B|=-30+33=3\quad\rightarrow\quad |A|\cdot|B|=|A\cdot B|$$

P.10) Si la matriu A és una matriu triangular (superior o inferior), llavors el determinat d'aquesta és el producte dels elements de la diagonal principal.

Exemple:

$$A=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&3&0\\1&-2&5\end{pmatrix}\qquad |A|=60$$

1.3 Rang d'una matriu

Definició

El *rang* d'una matriu $A=(a_{ij})_{mxn}$ és l'ordre del menor no nul més gran de la matriu A. El denotarem per $rg(A)$.

Hi ha molts mètodes per calcular el rang d'una matriu; nosaltres utilitzarem els menors de la matriu A.

Mètode per trobar el rang d'una matriu A per menors

Considerem la matriu $A=(a_{ij})_{mxn}$.

Utilitzarem uns quants exemples per veure com funciona:

Exemple:

1) Considerem la matriu A següent, busquem el seu rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que la matriu és de 3x4, el menor d'ordre més gran possible que podem escollir és de 3x3. Per tant, com a màxim, aquesta matriu tindrà rang 3.

Prenem un menor d'ordre 1 qualsevol; per exemple: (sovint aquest pas el donarem per suposat)

$$|1| \neq 0$$

Com que existeix algun menor d'ordre 1 diferent de 0, assegurem que la matriu té rang més gran o igual a 1.

Prenem un menor d'ordre 2 qualsevol tot afegint una fila i columna al menor anterior; per exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

El seu valor és diferent de 0; per tant, assegurem que el rang de la matriu és igual o més gran que 2.

Finalment prenem un menor d'ordre 3 qualsevol tot afegint una fila i una columna al menor d'ordre 2 i vegem si el determinant és diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 + 8 + 2 + 4 = 17 \neq 0$$

Per tant, com que hem trobat almenys un menor d'ordre 3 diferent de 0, tenim $rg(A)=3$.

2) Considerem la matriu A següent, busquem el seu rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Com que la matriu és de 3x4, el menor d'ordre més gran possible que podem escollir és de 3x3. Per tant com a màxim aquesta matriu tindrà rang 3.

Prenem un menor d'ordre 1 qualsevol; per exemple:

$$|1| = 1 \neq 0$$

Com que existeix algun menor d'ordre 1 diferent de 0, assegurem que la matriu té rang més rang o igual a 1.

Prenem un menor d'ordre 2 i vegem si el determinant és diferent de 0. Per exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0$$

Així assegurem que la matriu té rang més gran o igual a 2. Prenem un menor d'ordre 3 qualsevol tot afegint una fila i una columna; per exemple, el següent menor i vegem si el determinant és diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 12 + 32 + 8 - 16 - 18 = 0$$

Com que no és diferent de 0, escollim un altre menor d'ordre 3 i vegem si el determinant és diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 18 + 24 + 6 - 24 + 18 = 0$$

Així, com que tots els determinants d'ordre 3 són 0, llavors $rg(A)=2$.

3) Considerem la matriu A següent, busquem el seu rang.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Com que la matriu és de 3x3, el menor d'ordre més gran possible que podem escollir és de 3x3. Per tant com a màxim, aquesta matriu tindrà rang 3.

Prenem un menor d'ordre 1; per exemple:

$$|2| = 2 \neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 1.

Prenem un menor d'ordre 2 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Escollim un altre menor d'ordre 2, i observem que tots els menors d'ordre 2 són d'aquesta forma; per tant, $rg(A)=1$.

Tema 2: Sistemes d'equacions lineals

2.1 Definició de sistemes d'equacions lineals

Concepte de sistema d'equacions

Què és una sistema d'equacions?

Anomenem sistema de m equacions lineals amb n incògnites, el conjunt d'equacions de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \cdot & \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & & & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{cases}$$

en què els escalars a_{ij} s'anomenen coeficients, els x_j són incògnites i c_i són termes independents del sistema. Per $i=1,\dots m$ i $j=1,\dots, n$.

Exemples:

1) $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+y-4z=6 \\ 3x-z=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-1 \\ x_1+2x_2-5x_3=2 \\ x_1-3x_2+x_3=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+2y=0 \\ x+5y=-4 \\ x-y=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-y-z+t=1 \\ x+2y-4z-2t=-3 \\ x+3y-z+t=2 \end{cases}$

Tots els sistemes d'equacions es poden expressar matricialment, és a dir, utilitzant matrius.

Considerem un sistema d'equacions qualsevol:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \quad . \qquad . \qquad\qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\qquad . \qquad\quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Aquest sistema es pot expressar amb matrius de la manera següent:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_m \end{pmatrix}$$

és a dir, $A \cdot X = C$

en què:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_m \end{pmatrix}$$

En aquest cas, $A=(a_{ij})_{mxn}$ és la matriu del coeficients, $X=(x_j)_{1xn}$ el vector columna d'incògnites i $C=(c_i)_{mx1}$ el vector columna dels termes independents del sistema.

Exemple:

Considerem el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + y - 4z = 6 \\ 3x - z = 1 \end{cases}$$

Expressat matricialment és:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tipus de sistemes d'equacions

Direm que un sistema d'equacions lineals és *homogeni* quan el vector columna $C=(c_i)_{mx1}$ és nul, és a dir, tots els seus elements són 0. D'altra banda, si això no passa, el sistema d'equacions lineal és *heterogeni*.

Exemples:

1) $\begin{cases} 2x - z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ en què $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és nul; per tant, sistema d'equacions homogeni

2) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + y - 4z = 6 \\ 3x - z = 1 \end{cases}$ en què $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ no és nul; per tant, sistema d'equacions heterogeni

2.2 Classificació de sistemes: teorema de Rouché-Fröbenius

Nocions prèvies

Anomenarem *matriu ampliada* d'un sistema d'equacions lineal, la matriu resultant d'adjuntar a la matriu del coeficients $A=(a_{ij})_{mxn}$ el vector columna dels termes independents $C=(c_i)_{mxl}$. La denotarem per (A, C).

$$(A,C) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & c_2 \\ . & . & & & & & \\ . & & . & & & & \\ . & & & . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

Anomenarem *solucions* del sistema d'equacions lineal $A \cdot X = C$, el conjunt de nombres que verifiquen totes les igualtats del sistema.

Direm que dos sistemes d'equacions lineals diferents són *equivalents* si ambdós tenen les mateixes solucions.

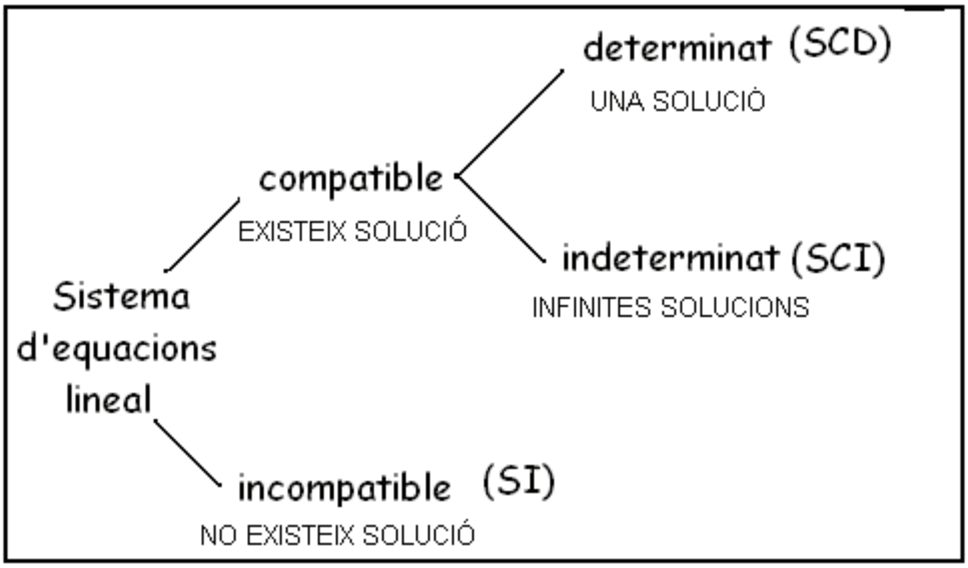
Anomenarem *grau d'indeterminació* d'un sistema d'equacions lineals, el nombre resultant de *nº incògnites* $-rg(A)$.

Classificació de sistemes

Per classificar sistemes d'equacions lineals, tindrem en compte dos aspectes: l'existència de solucions i la seva quantitat.

Així, si un sistema d'equacions té solució, l'anomenarem *sistema compatible*; en cas que no hi hagi cap solució, l'anomenarem *sistema incompatible*.

En cas que hi hagi solucions, pot passar que existeixi una única solució; per tant, tindrem un *sistema compatible determinat* . O pot passar que n'existeixi un conjunt infinit; per tant, tindrem un *sistema compatible indeterminat*.



Cal afegir que els sistemes d'equacions lineals homogenis solament poden ser compatibles. A més a més, sempre inclouen la solució (0,...,0). O sigui, poden ser compatibles determinats si tenen una única solució (0,...,0), o compatibles indeterminats si en tenen infinites. Però mai no seran sistemes incompatibles.

Teorema de Rouche-Fröbenius

Considerem un sistema d'equacions lineals:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \cdot & \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & & & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}\right.$$

La matriu dels coeficients $A=(a_{ij})_{mxn}$ i la matriu ampliada (A, C) corresponents al sistema d'equacions:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (A,C)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & c_2 \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ \cdot & & \cdot & & & & \\ \cdot & & & \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

Per classificar els sistema d'equacions, tindrem en compte el rang d'aquestes dues matrius.

1) Un sistema és incompatible si i només si $rg(A)\neq rg(A, C)$

2) Un sistema és compatible si i només si $rg(A)=rg(A, C)$

2.1) Si $rg(A)=rg(A, C)$ = *nº incògnites*, el sistema és compatible determinat.

2.2) Si $rg(A)=rg(A, C)\neq$ *nº incògnites*, el sistema és compatible indeterminat.

$rg(A)\neq rg(A,C) \Rightarrow$ SI

$rg(A)=rg(A,C)$ <
- $rg(A)=rg(A,C)=$ nº incògnites $\Rightarrow$ SCD
- $rg(A)=rg(A,C)\neq$ nº incògnites $\Rightarrow$ SCI

Exemples:

1) Considerem el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

Calculem el rang de la matriu dels coeficients i el rang de la matriu ampliada del sistema d'equacions.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A, C) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Busquem el rang de la matriu A:

$$|2| = 2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Per tant, $rg(A)=3$

Busquem el rang de la matriu (A, C):

$$|2| = 2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Observem que, en aquest cas, podem considerar els mateixos menors. Per tant, $rg(A, C)=3$.

Així, com que tenim tres incògnites, es compleix la igualtat següent:

$$rg(A) = rg(A, C) = n^{o}\ \textit{incògnites}$$

Per tant, tenim un sistema compatible determinat.

2) Considerem el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2x - y - 3z = 1 \end{cases}$$

Calculem el rang de la matriu dels coeficients i el rang de la matriu ampliada del sistema d'equacions.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix} \qquad (A,C)=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & 5\\ 2 & -1 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

Busquem el rang de la matriu A:

$$|3| = 3 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Per tant, $rg(A)=2$

Busquem el rang de la matriu (A, C):

$$|3| = 3 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Observem que, en aquest cas, podem considerar els mateixos menors. Per tant, $rg(A, C)=2$.

Així, com que tenim tres incògnites, es compleix la igualtat següent:

$$rg(A) = rg(A, C) \neq n^o \ incògnites$$

Per tant, tenim un sistema compatible indeterminat.

3) Considerem el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3\\ 5x + 5y - 4z = 1\\ 3x + 2y - z = 1\end{cases}$$

Calculem el rang de la matriu dels coeficients i el rang de la matriu ampliada del sistema d'equacions.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 5 & 5 & -4\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix} \qquad (A,C)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 5 & 5 & -4 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Busquem el rang de la matriu A:

$$|1| = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & 5\end{vmatrix} = 10 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 5 & 5 & -4\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix} = 0$$

Per tant, $rg(A)=2$

Busquem el rang de la matriu (A,C):

$$|1| = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Per tant, $rg(A, C)=3$.

Així, doncs:

$$rg(A) \neq rg(A, C)$$

Per tant, tenim un sistema incompatible.

2.3 Resolució de sistemes

Fins ara hem après a solucionar sistemes d'equacions lineals utilitzant els mètodes d'igualació, de substitució o de reducció. Aquest mètodes són pràctics quan el sistema d'equacions lineals és petit, és a dir, té poques incògnites o equacions.

Què passa si el sistema d'equacions lineals és gran? Llavors els mètodes que coneixem es fan més feixucs, i ens és més pesat seguir el càlcul.

Per tant, utilitzarem altres mètodes, com la triangularització de Gauss o el mètode de Cramer.

Mètode de Cramer

El mètode de Cramer es pot utilitzar sols si el determinant de la matriu dels coeficients del sistema d'equacions lineals $A=(a_{ij})_{nxn}$ és diferent de 0, és a dir, quan $|A|\neq 0$.

Normalment el mètode de Cramer s'utilitza per resoldre sistemes compatibles determinants, però algun cop es pot transformar i pot solucionar sistemes compatibles indeterminats.

Com s'aplica?

Considerem un sistema d'equacions lineals qualsevol:

1) Prenem la matriu dels coeficients $A=(a_{ij})_{nxn}$ i comprovem que el seu determinant és diferent de 0.

2) Les solucions del sistema seran les següents:

$$x_i = \frac{|\hat{A}_i|}{|A|}$$

en aquest cas, $\hat{A}_i$ és la matriu resultant de substituir la i-èssima columna per la columna dels termes independents.

Exemple:

1) Considerem el següent sistema d'equacions lineals compatible determinat:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

Per tant, tindrem:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Per poder aplicar el mètode de Cramer, necessitem que els seu determinant de A sigui diferent de 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Per tant, podrem aplicar Cramer:

$$x = \frac{|\hat{A}_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = \frac{|\hat{A}_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$z = \frac{|\hat{A}_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6}{2} = 3$$

2) Considerem el següent sistema d'equacions lineals compatible indeterminat:

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 1 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

Podem transformar-lo de la següent manera, tot passant qualsevol incògnita a l'altra banda d'igualtat i fent-la formar part del vector de termes independents.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 + 3z \\ 3x + 2y = 5 + z \end{cases}$$

Per tant, tindrem:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 1+3z \\ 5+z \end{pmatrix}$$

Per poder aplicar el mètode de Cramer, necessitem que el determinant de A sigui diferent de 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

Per tant, podrem aplicar Cramer:

$$x = \frac{|\hat{A}_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1+3z & -1 \\ 5+z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7z+7}{7} = z+1 \qquad y = \frac{|\hat{A}_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+3z \\ 3 & 5+z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-7z+7}{7} = -z+1$$

Per tant, si anomenem $z=\lambda$, llavors $x=\lambda+1$ i $y=-\lambda+1$.

Tema 3: L'espai $\mathbf{R}^n$

3.1 Operacions amb vectors. Propietats

Operacions amb vectors

Què és un vector?

Anomenarem *vector* (fila o columna) de n components, el conjunt ordenat de n nombres reals escrits de la següent manera, i el denotarem per $\vec{v}$.

$$\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Els nombres x_i $i=1,\ldots,n$ s'anomenen *components* o *coordenades* del vector $\vec{v}$.
El conjunt de vectors de n components o coordenades s'anomena *espai vectorial* $\mathbf{R}^n$.

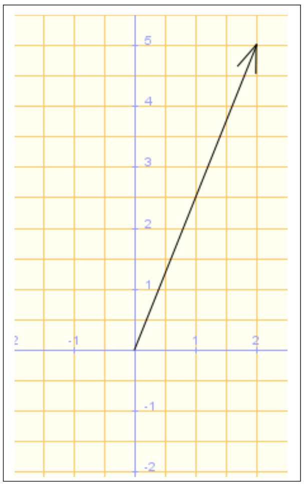
Exemples:
1) $\vec{v} = (2,-3,1)$ *és un vector de tres components o coordenades 2, −3 i 1.*
2) $\vec{u} = (1,4,0)$, $\vec{v} = (2,1,-1)$ *i* $\vec{t} = (9,5,-6)$ *és un conjunt de vectors de 3 components o coordenades. Aquests tres vectors formen part de l'espai vectorial* $\mathbf{R}^3$.

Representació gràfica de vectors

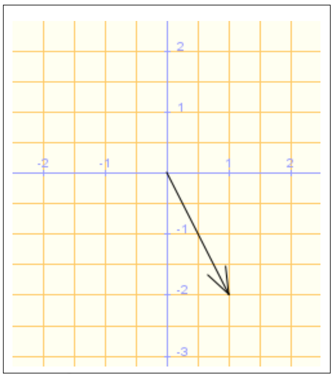
Normalment representarem els vectors en eixos de coordenades en $\mathbf{R}^n$ i des de l'origen de coordenades, és a dir, el punt (0,0,...,0). Vegem-ho amb uns quants exemples:

Exemples:

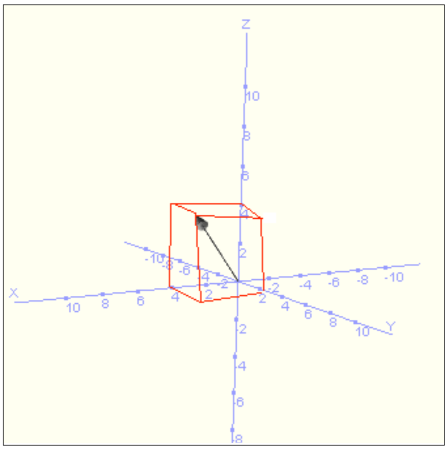
1) $\vec{v} = (2,5)$ *2)* $\vec{v} = (1,-2)$ *3)* $\vec{v} = (4,2,4)$



Imatge 1



Imatge 2



Imatge 3

Suma de vectors

Siguin $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $\vec{u} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dos vectors de $\mathbf{R}^n$. Definim la seva suma com el vector:

$$\vec{v} + \vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Exemple:

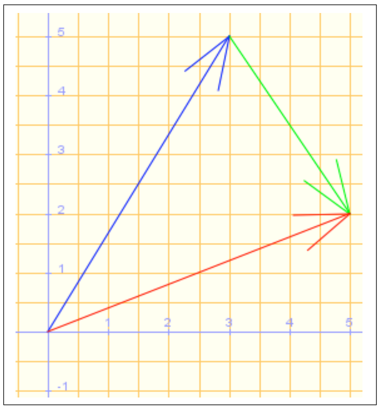
1) $\vec{v} = (-1,8,2)$ i $\vec{u} = (3,-4,0)$

$$\vec{v} + \vec{u} = (-1,8,2) + (3,-4,0) = (-1+3, 8+(-4), 2+0) = (2,4,2)$$

Representació gràfica de la suma de dos vectors

Exemple:

$$\vec{v} + \vec{u} = (3,5) + (2,-3) = (5,2)$$



Imatge 4

Resta de vectors

Siguin $\vec{v} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $\vec{u} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dos vectors de **R**^{n}. Definim la seva resta com el vector:

$$\vec{v} - \vec{u} = (x_1, x_2, ..., x_n) - (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$$

Exemple:

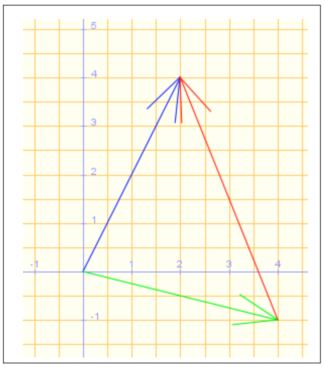
1) $\vec{v} = (-1,8,2)$ i $\vec{u} = (3,-4,0)$

$$\vec{v} - \vec{u} = (-1,8,2) - (3,-4,0) = (-1-3, 8-(-4), 2-0) = (-4,12,2)$$

Representació gràfica de la resta de dos vectors

Exemple:

$$\vec{v} - \vec{u} = (2,4) - (4,-1) = (-2,5)$$



Imatge 5

Producte d'un escalar per un vector

Siguin $\vec{v} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un vector de **R**^{n} i λ un nombre real. Definim el producte d'un escalar per un vector com el vector:

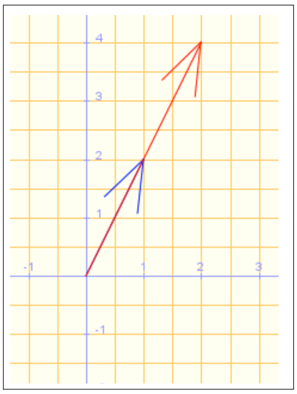
$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

Exemple:

1) $\vec{v} = (-1,8,2)$ i $\lambda = 2$ $\qquad 2 \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-1,8,2) = (-2,16,4)$

Representació gràfica del producte d'un escalar per un vector
Exemple:

$$\lambda \cdot \vec{v} = 2 \cdot (1,2) = (2,4)$$



Imatge 6

Propietats

- Considerem $\vec{v}$ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ quatre vectors qualssevol i λ, λ_1 i λ_2 tres escalars.
- Commutativa: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$
- Associativa: $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$
- Element neutre: $\vec{0} + \vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{0} = \vec{v}_1$
- Element oposat: $\vec{v}_1 - \vec{v}_1 = \vec{0}$
- Propietats del producte d'un escalar per un vector:
  - $\lambda \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda \cdot \vec{v}_1 + \lambda \cdot \vec{v}_2$
  - $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{v} + \lambda_2 \cdot \vec{v}$
  - $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \vec{v} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{v})$
  - $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
  - $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

3.2 Combinació lineal. Dependència i independència lineal

Combinació lineal

Direm que un vector $\vec{v}$ de $\mathbf{R}^n$ és una combinació lineal dels vectors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ si existeixen *n* escalars α_i, *i=l,..., n* de manera que:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + ... + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{v}$$

Els escalars α_i s'anomenen coeficients de la combinació lineal.

Exemples:

1) Vegem si $\vec{v}=(12,-7,9)$ està en combinació lineal amb els vectors $\{\vec{v}_1=(2,1,-1),$ $\vec{v}_2=(-1,2,1),\vec{v}_3=(2,-1,3)\}$ i quins són els coeficients de la combinació lineal.

$$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\alpha_3\vec{v}_3=v \quad \rightarrow \quad \alpha_1(2,1,-1)+\alpha_2(-1,2,1)+\alpha_3(2,-1,3)=(12,-7,9) \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=12 \\ \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=-7 \\ -\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=9 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1=1 \\ \alpha_2=-2 \\ \alpha_3=4 \end{cases}$$

El vector $\vec{v}$ sí que es pot posar amb combinació lineal dels vectors $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$, ja que el sistema té solució. I els coeficients són $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-2$ *i* $\alpha_3=4$.

2) Vegem si $\vec{v}=(1,0)$ està en combinació lineal amb els vectors $\{\vec{v}_1=(1,3)\ \vec{v}_2=(2,6)\}$ i quins són els coeficients de la combinació lineal.

$$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2=v \rightarrow \alpha_1(1,3)+\alpha_2(2,6)=(1,0) \rightarrow \begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2=1 \\ 3\alpha_1+6\alpha_2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1=1-2\alpha_2 \\ 3\neq 0 \end{cases}$$

El vector $\vec{v}$ no es pot posar amb combinació lineal dels vectors $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$, ja que el sistema no té solució.

Dependència i independència lineal

Sigui l'espai vectorial $\mathbf{R}^n$, donat un conjunt de vectors $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}\in\mathbf{R}^n$,es diu que:

- Els vectors $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n$ són linealment dependents (l.d.), si almenys un d'aquests vectors es pot posar com a combinació lineal de la resta. És a dir, que existeixen escalars α_i $i=1,...,n$, no tots nuls de manera que:

$$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+....+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{0}$$

- Els vectors $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n$ són linealment independents (l.i.), si cap d'aquests vectors es pot posar com a combinació lineal de la resta. És a dir, que la següent igualtat sols es compleix quan els escalars α_i $i=1,...,n$ són nuls.

$$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+....+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{0} \quad \text{i} \quad \alpha_1=0,\alpha_2=0,....,\alpha_n=0$$

Exemples:

1) $S = \{\vec{v}_1 = (1,0)\ \vec{v}_2 = (0,4)\ \vec{v}_3 = (2,4)\}$

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,4) + \alpha_3(2,4) = (0,0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2\lambda \\ \alpha_2 = -\lambda \\ \alpha_3 = \lambda \end{cases}$$

Veiem que si prenem, per exemple, $\lambda=1$, obtenim $\alpha_1=-2$, $\alpha_2=-1$ i $\alpha_3=0$. En aquest cas no tots són nuls; per tant, el conjunt de vectors $S = \{\vec{v}_1 = (1,0)\ \vec{v}_2 = (0,4)\ \vec{v}_3 = (2,4)\}$ són vectors linealment dependents.

2) $S = \{\vec{v}_1 = (1,-2), \vec{v}_2 = (3,4)\}$

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1(1,-2) + \alpha_2(3,4) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Com que és compleix la igualtat i tots els α són nuls, en concret $\alpha_1=0$ i $\alpha_2=0$, per tant, podem afirmar que el conjunt de vectors $S = \{\vec{v}_1 = (1,-2), \vec{v}_2 = (3,4)\}$ són vectors linealment independents.

Una altra manera de provar la independència o dependència lineal d'un conjunt de vectors és amb la utilització de rangs:

1. Prenem el conjunt de vectors $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$.
2. Els situem formant una matriu de manera que cada vector ocupi una columna (o fila) d'aquesta matriu.
3. Busquem el rang de la matriu resultant.
4. El rang indica el nombre de vectors linealment independents del conjunt.

Exemples:

1) $S = \{\vec{v}_1 = (1,0)\ \vec{v}_2 = (0,4)\ \vec{v}_3 = (2,4)\}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Comprovem que rang(A)=2. Per tant, el nombre de vectors linealment independents en aquest conjunt és 2. Així, doncs, hi haurà un vector que es podrà expressar com a combinació lineal de la resta. Per tant, el conjunt de vectors $S = \{\vec{v}_1 = (1,0)\ \vec{v}_2 = (0,4)\ \vec{v}_3 = (2,4)\}$ són vectors linealment dependents.

2) $S = \{\vec{v}_1 = (1,-2), \vec{v}_2 = (3,4)\}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Comprovem que rang(A)=2. Per tant, el nombre de vectors linealment independents en aquest conjunt és 2. Per tant, el conjunt de vectors $S = \{\vec{v}_1 = (1,-2), \vec{v}_2 = (3,4)\}$ són vectors són linealment independents.

Bases

Donat un espai vectorial $\mathbf{R}^n$, anomenarem dimensió d'aquest espai, i ho denotarem per *dim*, el nombre *n*.

Exemples:

1) $dim\ \mathbf{R}^2 = 2$ 2) $dim\ \mathbf{R}^3 = 3$ 3) $dim\ \mathbf{R}^n = n$

Direm que un conjunt de vectors $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ és la base de $\mathbf{R}^n$ si:

a) k = n (el nombre de vectors del conjunt és igual a la dimensió de l'espai)

b) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ són linealment independents.

Per tant, una base de $\mathbf{R}^n$ és un conjunt de n vectors linealment independents que generen tots els vectors de l'espai vectorial $\mathbf{R}^n$.

És a dir, podem expressar qualsevol vector de l'espai vectorial com una combinació lineal única dels vectors que formen la base.

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \text{ és base } \Leftrightarrow \exists!\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \text{ tal que } \vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n$$

Exemples:

1) $B = \{\vec{v}_1 = (1,0), \vec{v}_2 = (0,4), \vec{v}_3 = (2,4)\}$ aquest conjunt de vectors no pot formar una base a $\mathbf{R}^2$, ja que el nombre de vectors és 3 i la dimensió de l'espai és 2.

2) $B = \{\vec{v}_1 = (1,-2), \vec{v}_2 = (2,-4)\}$ aquest conjunt de vectors no pot ser base a $\mathbf{R}^2$, ja que si bé compleix que el nombre de vectors del conjunt és igual a la dimensió de l'espai però, aquests vectors no són linealment independents.

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1(1,-2) + \alpha_2(2,-4) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2\lambda \\ \alpha_2 = \lambda \end{cases}$$

3) $B = \{\vec{v}_1 = (1,-2), \vec{v}_2 = (3,4)\}$ aquest conjunt de vectors compleix les dues condicions per ser base de $\mathbf{R}^2$, ja que el nombre de vectors és dos a igual com la dimensió de l'espai i els vectors són linealment independents (ho hem comprovat en un exemple anterior).

Base canònica

Definim la *base canònica* d'un espai vectorial $\mathbf{R}^n$ com el conjunt de vectors $B = \{\vec{e}_1 = (1,0,...,0)\ \vec{e}_2 = (0,1,0,...,0),...,\vec{e}_n = (0,0,...,1)\}$ en què els vectors que la formen tenen totes les seves components 0 excepte la coordenada *i*-èssima, que és 1.

Exemples:
1) $B = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$ *és la base canònica a* $\mathbf{R}^2$
2) $B = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ *és la base canònica a* $\mathbf{R}^3$

Existeixen infinites bases en qualsevol espai vectorial però totes tenen el mateix nombre de vectors. Per exemple, en els últims exemples ens han sorgit $B_1 = \{\vec{v}_1 = (1,-2), \vec{v}_2 = (3,4)\}$ i $B_2 = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$ dues bases diferents de $\mathbf{R}^2$ però tenen el mateix nombre de vectors.

Canvi de base

Sigui l'espai vectorial $\mathbf{R}^n$ de dimensió *n* i $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ i $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ dues bases d'aquest espai. Què passa amb els vectors d'aquest espai quan canviem la base? Doncs que canvien de coordenades.

Vegem com podem trobar les coordenades d'un vector qualsevol quan el canviem d'una base a una altra.

- Si una de les dues bases és la base canònica, ens simplifica els càlculs:
  Siguin:
  $B_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ dues bases de $\mathbf{R}^n$ i $\vec{v}_{B_1} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un vector qualsevol.
  $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ $\qquad \vec{v}_{B_2} = (y_1, y_2, ..., y_n)$

  El vector $\vec{v}$ té unes coordenades o unes altres en funció de la base on ens trobem. I compleix la següent relació:

$$\vec{v}_{B_1} = A_{B_2} \cdot \vec{v}_{B_2}$$

  en què A_{B_2} és la matriu que té per columnes els vectors de la base B_2.

Exemples:

1) $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ *i* $B_2 = \{(-1,2),(1,1)\}$ dues bases de $\mathbf{R}^2$ i $\vec{v}_{B_1} = (3,6)$ un vector expressat en la base B_1. Volem trobar les coordenades del vector però en la base B_2, és a dir, $\vec{v}_{B_2} = (x, y)$.

$$\vec{v}_{B_1} = A_{B_2} \cdot \vec{v}_{B_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Per tant, $\vec{v}_{B_2} = (1,4)$

2) $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ *i* $B_2 = \{(-1,2),(1,1)\}$ dues bases de $\mathbf{R}^2$ i $\vec{v}_{B_2} = (1,4)$ un vector expressat en la base B_2. Volem trobar les coordenades del vector però en la base B_1, és a dir, $\vec{v}_{B_1} = (x, y)$.

$$\vec{v}_{B_1} = A_{B_2} \cdot \vec{v}_{B_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \\ y = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

Per tant, $\vec{v}_{B_1} = (3,6)$

- Si tenim dues bases qualssevol:

  Siguin:

  $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ dues bases de $\mathbf{R}^n$ i $\vec{v}_{B_1} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un vector qualsevol.
  $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ $\qquad \vec{v}_{B_2} = (y_1, y_2, ..., y_n)$

  Per trobar les coordenades d'un vector d'una de les dues bases a l'altra, procedim de la manera següent:

  Prenem el vector que ens donen $\vec{v}_{B_1}$ i la base en la qual es troba expressat $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$. Prenem també la base canònica $B_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$.

  Així, tenim:

  $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ dues bases de $\mathbf{R}^n$ i $\vec{v}_{B_1} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un vector qualsevol.
  $B_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ $\qquad \vec{v}_{B_3} = (z_1, z_2, ..., z_n)$

  Busquem les coordenades del vector $\vec{v}_{B_1}$ en la base B_3, és a dir, obtenim el vector $\vec{v}_{B_3}$. Ara considerem:

  $B_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ dues bases de $\mathbf{R}^n$ i $\vec{v}_{B_3} = (z_1, z_2, ..., z_n)$ un vector qualsevol.
  $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ $\qquad \vec{v}_{B_2} = (y_1, y_2, ..., y_n)$

  Busquem les coordenades del vector $\vec{v}_{B_3}$ en la base B_2, és a dir, obtenim el vector $\vec{v}_{B_2}$.

Exemple:

1) $B_1=\{(1,-1),(3,1)\}$ *i* $B_2=\{(-1,2),(1,2)\}$ dues bases de $\mathbf{R}^2$ i $\vec{v}_{B_1}=(-2,2)$ un vector expressat en la base B_1. Volem trobar les coordenades del vector però en la base B_2, és a dir, $\vec{v}_{B_2}=(x,y)$.

Considerem la base canònica a $\mathbf{R}^2$, és a dir, $B_3=\{(1,0),(0,1)\}$ i busquem les coordenades del vector $\vec{v}_{B_1}=(-2,2)$ en la base B_3 és a dir, $\vec{v}_{B_3}=(z,t)$.

$$\vec{v}_{B_3}=A_{B_1}\cdot\vec{v}_{B_1} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2\\ 2\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} z=1\cdot(-2)+3\cdot 2\\ t=(-1)\cdot(-2)+1\cdot 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=4\\ t=4\end{cases}$$

Per tant, $\vec{v}_{B_3}=(4,4)$. Ara busquem les coordenades del vector $\vec{v}_{B_3}=(4,4)$ en la base B_2 és a dir, $\vec{v}_{B_2}=(x,y)$.

$$\vec{v}_{B_3}=A_{B_2}\cdot\vec{v}_{B_2} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} 4\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -x+y=4\\ 2x+2y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1\\ y=3\end{cases}$$

Per tant $\vec{v}_{B_2}=(-1,3)$

3.3 Producte escalar. Norma i distància

Producte escalar

Definim el *producte escalar* de dos vectors $\vec{v}=(x_1,x_2,....,x_n)$ i $\vec{u}=(y_1,y_2,....,y_n)\in\mathbf{R}^n$ com el nombre real resultant de l'operació següent; el denotarem per $<\vec{u},\vec{v}>$.

$$<\vec{u},\vec{v}>=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+....+x_n\cdot y_n$$

Exemple:

1) Sigui $\vec{v}=(1,2,-3)$ *i* $\vec{u}=(-2,0,-1)\in\mathbf{R}^3$ $\quad <\vec{u},\vec{v}>=1\cdot(-2)+2\cdot 0+(-3)\cdot(-1)=1$

Norma i distància

Norma o mòdul d'un vector

Definim *norma* o *mòdul* d'un vector $\vec{v}=(x_1,x_2,....,x_n)\in\mathbf{R}^n$ com el nombre real no negatiu resultant de l'operació següent; el denotarem per $\|\vec{v}\|$.

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$$

Exemples:

1) $\vec{v}=(1,2,-3)\in \mathbf{R}^3$ $\quad \|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+2^2+.(-3)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}\approx 3'74$

2) $\vec{u}=(-4,0,3)\in \mathbf{R}^3$ $\quad \|\vec{u}\|=\sqrt{(-4)^2+0^2+.3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

Vector unitari

Direm que un vector $\vec{v}=(x_1,x_2,....,x_n)\in \mathbf{R}^n$ és un vector unitari si $\|\vec{v}\|=1$.

Exemple:

1) $\vec{v}=(0,-1,0)\in \mathbf{R}^3$ $\quad \|\vec{v}\|=\sqrt{0^2+(-1)^2+.0^2}=\sqrt{1}=1$

Distància entre dos vectors

Definim la *distància* entre dos vectors $\vec{v}=(x_1,x_2,....,x_n)$ i $\vec{u}=(y_1,y_2,....,y_n)\in \mathbf{R}^n$ com el nombre real resultant de l'operació següent; el denotarem per $d(\vec{u},\vec{v})$.

$$d(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{v}-\vec{u}\|$$

Exemple:

1) $\vec{v}=(1,2,-3)$ *i* $\vec{u}=(-2,0,-1)\in \mathbf{R}^3$ $\quad \vec{v}-\vec{u}=(1,2,-3)-(-2,0,-1)=(3,2,-2)$

$$d(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{v}-\vec{u}\|=\|(3,2,-2)\|=\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}\approx 4'12$$

Ortogonalitat de vectors

Direm que dos vectors $\vec{v}=(x_1,x_2,....,x_n)$ i $\vec{u}=(y_1,y_2,....,y_n)\in \mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ són ortogonals o perpendiculars ($\perp$) si i només si $<\vec{u},\vec{v}>=0$.

Exemples:

1) Sigui $\vec{u}=(3,1,-1)$ *i* $\vec{v}=(2,0,4)\in \mathbf{R}^3$ $\quad <\vec{u},\vec{v}>=3\cdot 2+1\cdot 0+(-1)\cdot 4=2\neq 0$

Per tant, els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ no són ortogonals.

2) Sigui $\vec{u}=(3,1,-1)$ *i* $\vec{v}=(2,-2,4)\in \mathbf{R}^3$ $\quad <\vec{u},\vec{v}>=3\cdot 2+1\cdot(-2)+(-1)\cdot 4=0$

Per tant, els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són ortogonals.

Donat un conjunt de vectors $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}\in\mathbf{R}^n$, direm que és una base ortogonal de $\mathbf{R}^n$ si i només si són base i són ortogonals dos a dos.

Exemple:

1) $B=\{\vec{v}_1=(1,1,1),\vec{v}_2=(2,1,-3),\vec{v}_3=(4,-5,1)\}\in\mathbf{R}^3$

Comprovem que aquest conjunt de vectors és una base:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -5\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -5\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=-42\neq 0$$

Per tant, vectors l.i.

Com que el nombre de vectors és igual a la dimensió de l'espai al qual pertanyen i són també l.i., podem dir que són una base de $\mathbf{R}^3$.

Comprovem que són ortogonals dos a dos:

$$<\vec{v}_1,\vec{v}_2>=1\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot(-3)=0$$
$$<\vec{v}_1,\vec{v}_3>=1\cdot 4+1\cdot(-5)+1\cdot 1=0$$
$$<\vec{v}_2,\vec{v}_3>=2\cdot 4+1\cdot(-5)+(-3)\cdot 1=0$$

Per tant, $B=\{\vec{v}_1=(1,1,1),\vec{v}_2=(2,1,-3),\vec{v}_3=(4,-5,1)\}$ és una base ortogonal.

Propietat: Si un conjunt de vectors $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}\in\mathbf{R}^n$ són ortogonals, llavors són *l.i.*

Nota: El recíproc d'aquesta propietat no és certa, és a dir, si tenim un conjunt de vectors $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}\in\mathbf{R}^n$ linealment independents, no podem assegurar que siguin ortogonals.

Exemples:

1) $S=\{\vec{v}_1=(1,1),\vec{v}_2=(1,0)\}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad rg(A)=2 \qquad <\vec{v}_1,\vec{v}_2>=1\neq 0$$

Per tant, aquests vectors són l.i. i no són ortogonals.

2) $S=\{\vec{v}_1=(1,1),\vec{v}_2=(2,2)\}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad rg(A)=1 \qquad <\vec{v}_1,\vec{v}_2>=4\neq 0$$

Per tant, aquests vectors no són l.i. i no són ortogonals.

3) $S = \{\vec{v}_1 = (1,1), \vec{v}_2 = (1,-1)\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad rg(A)=2 \qquad <\vec{v}_1, \vec{v}_2> = 0$$

Per tant, aquests vectors són l.i. i ortogonals.

Per tant, en l'exemple de la pàgina anterior ens hauríem pogut estalviar el fet de comprovar si els vectors de S són linealment independents. Així, doncs, tenim:

Donat un conjunt de vectors $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\} \in \mathbf{R}^n$, direm que és una base ortogonal de $\mathbf{R}^n$ si i només si compleix:

- $k = n$ (el nombre de vectors del conjunt és igual a la dimensió de l'espai).
- Els vectors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ són ortogonals dos a dos.

Exemple:

1) $B = \{\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (2,1,-3), \vec{v}_3 = (4,-5,1)\} \in \mathbf{R}^3$

El nombre de vectors és igual a la dimensió de l'espai al qual pertanyen.

Comprovem que són ortogonals dos a dos:

$$<\vec{v}_1, \vec{v}_2> = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0 \qquad <\vec{v}_1, \vec{v}_3> = 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 = 0$$
$$<\vec{v}_2, \vec{v}_3> = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + (-3) \cdot 1 = 0$$

Per tant, $B = \{\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (2,1,-3), \vec{v}_3 = (4,-5,1)\}$ és una base ortogonal.

Donat un conjunt de vectors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\} \in \mathbf{R}^n$, direm que és una base ortonormal de $\mathbf{R}^n$ si i només si és una base ortogonal i els vectors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ són unitaris.

Exemples:

1) $B = \{\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (2,1,-3), \vec{v}_3 = (4,-5,1)\}$

En l'exemple anterior hem comprovat que és una base ortogonal. Vegem si aquesta base és ortonormal:

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + .1^2} = \sqrt{3} \neq 1$$

Com que un ja no és unitari, no és pas una base ortonormal però sí una base ortogonal.

2) $B=\{\vec{v}_1=(1,0,0),\vec{v}_2=(0,1,0),\vec{v}_3=(0,0,1)\}$

El nombre de vectors és igual a la dimensió de l'espai al qual pertanyen. Comprovem que són ortogonals dos a dos i calculem el seu mòdul.

$$<\vec{v}_1,\vec{v}_2>=0\ ,\ <\vec{v}_1,\vec{v}_3>=0\ ,\ <\vec{v}_2,\vec{v}_3>=0\ ,\ \|\vec{v}_1\|=1\ ,\ \|\vec{v}_2\|=1\ ,\ \|\vec{v}_3\|=1$$

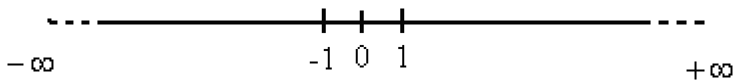
Per tant, $B=\{\vec{v}_1=(1,0,0),\vec{v}_2=(0,1,0),\vec{v}_3=(0,0,1)\}$ és una base ortonormal.

Part II: Anàlisi real

Tema 4: Funció real de variable real

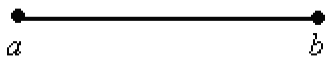
La recta real i els intervals

Els nombres reals es representen amb una recta que rep el nom de *recta real*.



Dins la recta real podem fer particions, és a dir, seleccionar-ne una part i no tenir en compte l'altra part. Per això, utilitzarem els intervals, que són subconjunts de nombres reals de la recta real. N'hi ha de tres tipus:

Interval tancat: $[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$



Interval obert: $(a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$

Interval semiobert: $(a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ o $[a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$

o

Nota: Quan a o b són $+\infty$ o $-\infty$, l'extrem de l'interval que conté aquests elements es considera obert, ja que són nombres que mai no arribem a agafar.

Exemples:

1) 2) 3)

$[-3,-1]$ $(2,7)$ $(0,4]$

4) 5) 6)

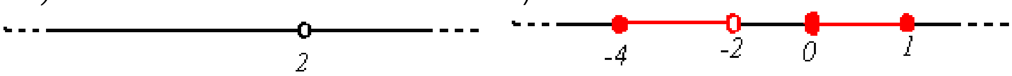
$[-3,1)$ $[-3,+\infty)$ $(-\infty,4)$

Molt cops també necessitarem altres notacions com:

- $\mathbf{R}$ o bé $(-\infty,+\infty)$ que denoten tots els nombres reals.
- $\mathbf{R}\setminus\{a\}$, que denota tots els nombres reals menys el nombre a.
- $(a, b) \cup (c, d)$ que denota la unió d'intervals, siguin de quin tipus siguin.

Exemples:

1) 2)

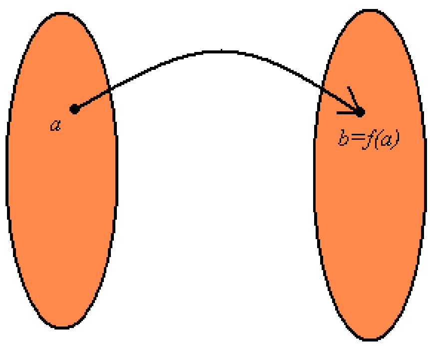


$\mathbf{R}\setminus\{2\}$ $[-4, -2)\cup[0, 1]$

Concepte de funció real de variable real

Una funció f real de variable real x,que denotarem per $f(x)$, és una correspondència que assigna a cada element $a \in A \subset \mathbf{R}$, un element $b \in \mathbf{R}$

$$f\colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$



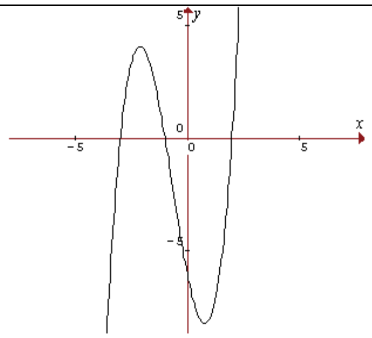
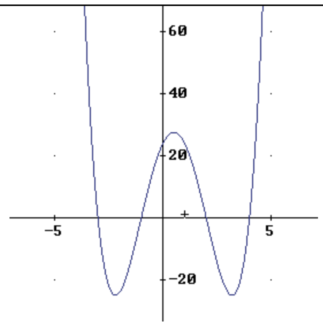
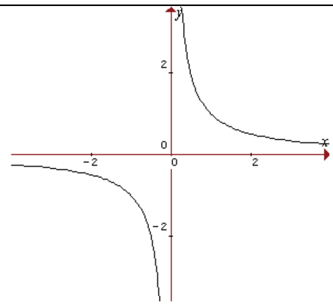
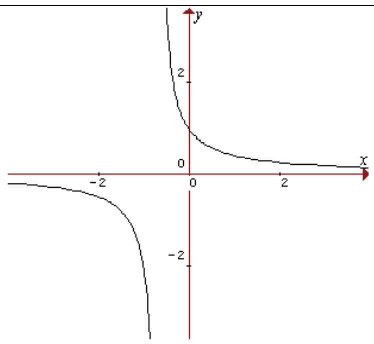
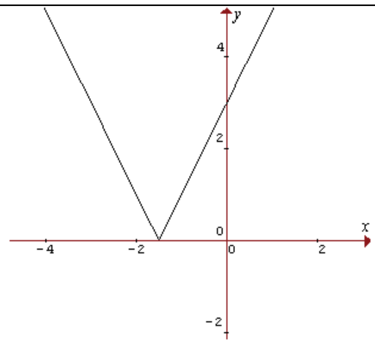
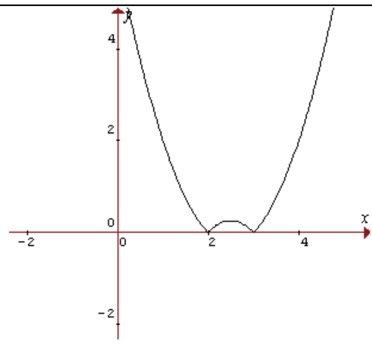
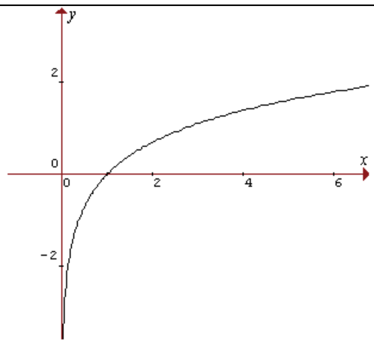
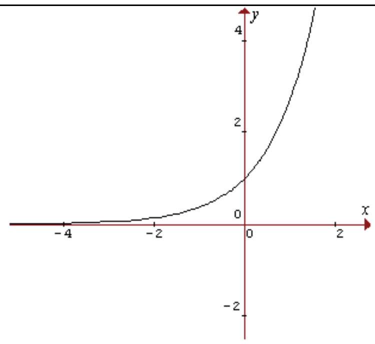
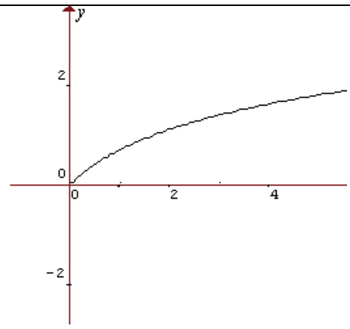
Imatge 7

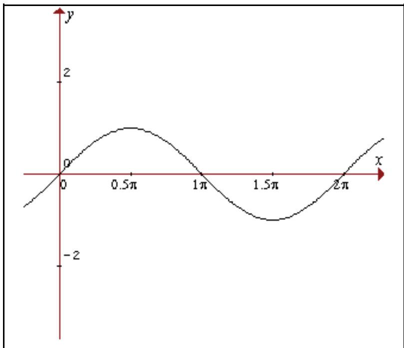
Donat un valor $a \in A \subset \mathbf{R}$, el valor que s'obté en fer $f(a)$, s'anomena valor de la funció $f(x)$ al punt a.

Exemples:

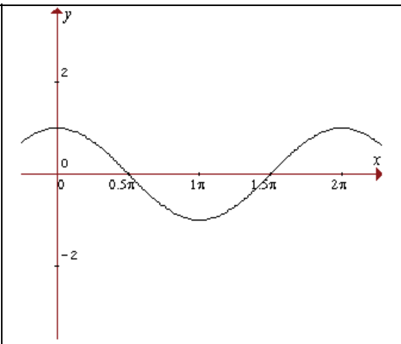
1) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} \longrightarrow f(2) = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$ 2) $f(x) = x^2 + \ln(x) \longrightarrow f(1) = 1^2 + \ln(1) = 1$

Les funcions es representen en gràfiques en un sistema cartesià de coordenades. Aquestes estan formades pel conjunt de punts $(x, f(x))$; per tant, la gràfica de qualsevol funció $f(x)$ és el conjunt $G_f = \{(x, y) | \, y = f(x)\}$.

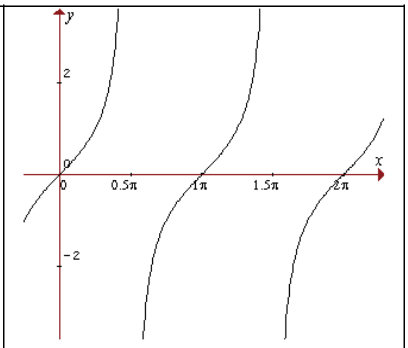
 Funció polinòmica de grau 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	 Funció polinòmica de grau 4 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	 Funció de proporconalitat inversa $y = \dfrac{1}{x}$
 Funció homogràfica $y = b + \dfrac{k}{x-a}$	 Funció valor absolut lineal $y = \lvert ax + b \rvert$	 Funció valor absolut quadràtica $y = \lvert ax^2 + bx + c \rvert$
 Funció logarítmica $y = \log_a x \;\; ; \;\; y = \ln x$	 Funció exponencial $y = e^x \;\; ; \;\; y = a^x$	 Funció arrel $y = \sqrt{x}$



Funció sinus $y = \sin x$



Funció cosinus $y = \cos x$



Funció tangent $y = tgx$

Domini i recorregut d'una funció

El conjunt de punts $x \in \mathbf{R}$ pel qual existeix $f(x)$ s'anomena domini de $f(x)$, i el denotarem per $Domf(x)$.

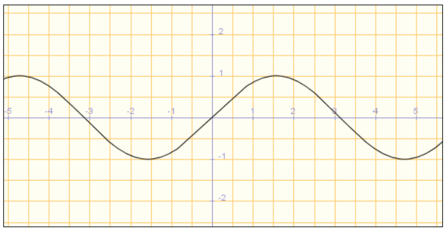
$$Domf(x)=\{x \in \mathbf{R} | \exists\, y \in \mathbf{R},\ y= f(x)\}$$

El conjunt de punts $f(x) \in \mathbf{R}$ que tenen antiimatge x s'anomenen recorregut o imatge de $f(x)$, i el denotarem per $Imf(x)$.

$$Imf(x)=\{y \in \mathbf{R} | \exists\, x \in \mathbf{R},\ y= f(x)\}$$

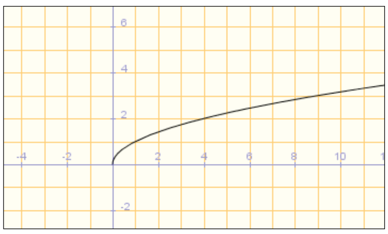
Exemples:

1) $f(x) = \sin(x)$ $\qquad$ $Domf(x)=\mathbf{R}$ i $Imf(x)= [-1, 1]$



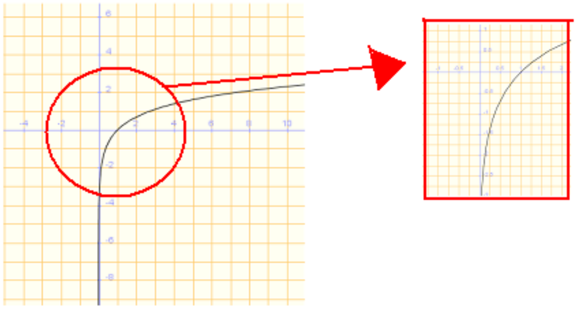
Imatge 8

2) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ $Domf(x)=[0, +\infty)$ i $Imf(x)=[0, +\infty)$



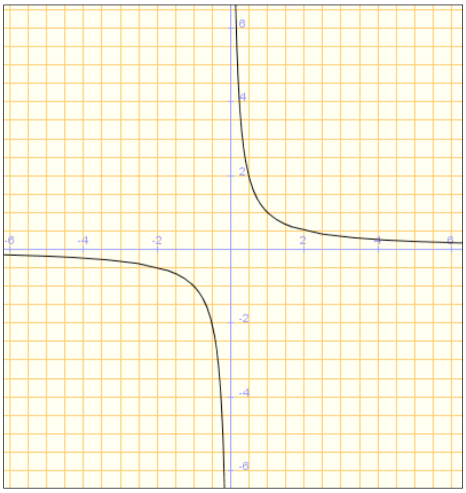
Imatge 9

3) $f(x) = \ln(x)$ $\qquad$ $Domf(x) = (0, +\infty)$ i $Imf(x) = \mathbf{R}$



Imatge 10

4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $Domf(x) = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ i $Imf(x) = \mathbf{R}\setminus\{0\}$



Imatge 11

Normalment per donar el domini d'una funció, no tindrem la seva gràfica per veure'l i haurem de fer servir alguns càlculs.

Gairebé sempre buscarem el domini i el recorregut de funcions conegudes, és a dir: funcions polinòmiques, racionals (homogràfiques o de proporcionalitat inversa), exponencials, trigonomètriques, logarítmiques, radicals...

	$Domf(x)$	$Imf(x)$
Funcions polinòmiques	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
Funcions racionals	$\mathbf{R}\setminus\{\text{els valors que anul·len el denominador}\}$	$\mathbf{R}\setminus\{(*)\}$
Funcions exponencials	$\mathbf{R}$	$(0, +\infty)$
Funcions trigonomètriques (solament: sin(x),cos(x), tg(x))	$\mathbf{R}$ si $f(x)=sin(x)$ o $f(x)=cos(x)$	$[-1, 1]$
	$\mathbf{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$ si $f(x)=tg(x)$	$\mathbf{R}$

	Domf(x)	*Imf(x)*
Funcions logarítmiques	**R**\\{*els valors pels quals el logaritme no està definit*}	**R**
Funcions amb radicals $f(x)=\sqrt[n]{x}$	Si n és parell: **R**\\{*els valors pels quals el radical és negatiu*}	Si n és parell: $[0,+\infty)$
	Si n és senar: **R**	Si n és senar: **R**

(*)En el cas que el polinomi del numerador sigui de grau 1o 0, i el polinomi del denominador sigui de grau 1, serà **R**\\{el valor resultant de dividir els dos coeficients del terme de grau 1}. En la resta de casos ho haurem d'estudiar mitjançant els extrems de la funció i les asímptotes.

Exemples:

1) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+2}$

$x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2$ *Per tant, Domf(x)=*$\mathbf{R}\setminus\{-2\}$ *i Imf(x)=* $\mathbf{R}\setminus\{3\}$

2) $f(x)=\sqrt{2x+8}$

$2x+8<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-4$ *Per tant, Domf(x)=*$[-4,+\infty]$ *i Imf(x)=* $[0,+\infty]$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5}$

*Per tant, Domf(x)=***R** *i Imf(x)=* **R**

4) $f(x)=\log(x+7)$

$x+7\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq -7$ *Per tant, Domf(x)=*$(-7,+\infty)$ *i Imf(x)=* **R**

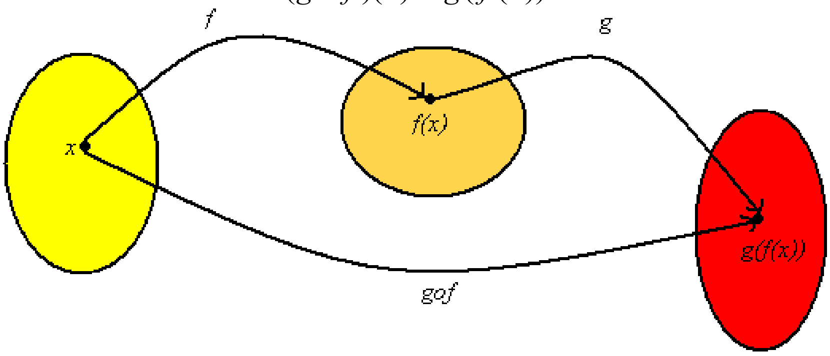
S'anomena *funció identitat* i la denotem per $f(x)=Id(x)=x$, la funció que deixa fixos tots els punts, és a dir, $f(a)=a \quad \forall a \in \mathbf{R}$.

Composició de funcions i funció inversa

Composició de funcions

Sigui $f: A \to B$ i $g: B \to C$, definim la funció composta:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Imatge 12

I li direm *f composada amb g*, en què a *x* hi apliquen la funció *f* i després a *f(x)* hi apliquem *g*. Obtenim, així, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

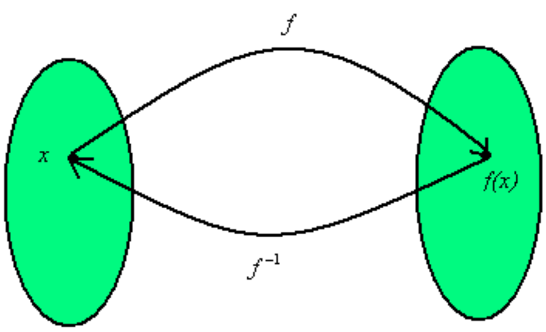
Exemples:
Considerem les funcions $f(x) = x - 1$ *i* $g(x) = x^2 + 3x - 1$

1) $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x-1) = (x-1)^2 + 3(x-1) - 1 = x^2 + x - 3$
2) $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 + 3x - 1) = x^2 + 3x - 1 - 1 = x^2 + 3x - 2$
3) $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f(x-1) = x - 1 - 1 = x - 2$

Funció inversa

Donada una funció $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, anomenarem *inversa* de la funció f, i la denotarem per f^{-1}, la funció definida per $f^{-1}: f(A) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de manera que:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = Id_A(x)$$



Imatge 13

Exemples:

1) $f(x)=x+3$ i $f^{-1}(x)=x-3$ $(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x+3-3=x$

2) $f(x)=ln(x)$ i $f^{-1}(x)=e^{x}$ $(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=e^{ln(x)}=x$

4.1 Continuïtat. Tipus de discontinuïtats

Límit d'una funció

Definició de límit

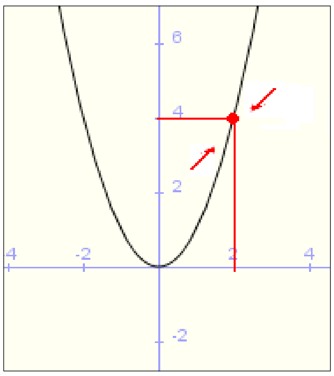
Sigui $f: A\subset \mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ i sigui $x_0\in A$. Diem que $L\in \mathbf{R}$ és el límit de la funció $f(x)$, quan x tendeix a x_0 i el denotem per:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

Quan ens aproximem al valor x_0, llavors les seves imatges s'aproximen a L.
El límit d'una funció $f(x)$ en un punt $x_0\in \mathbf{R}$, si existeix, és únic.

Exemple:
Vegem el límit de la funció $f(x) = x^2$ *en el punt* $x_0 = 2$:

X	$f(x)$
1'9	3'61
1'99	3'9601
1'999	3'996001
... ↓	... ↓
2	4
... ↑	... ↑
2'001	4,004001
2'01	4'0401
2'1	4'41



Imatge 14

Per tant, $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 4$

Límits laterals

Com que dins la recta real tenim dues possibilitats d'aproximar-nos a x_0, per la dreta i per l'esquerra, existeixen dos límits laterals:

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ límit *quan x tendeix a* x_0 per l'esquerra (límit lateral per l'esquerra)

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ límit *quan x tendeix a* x_0 per la dreta (límit lateral per la dreta)

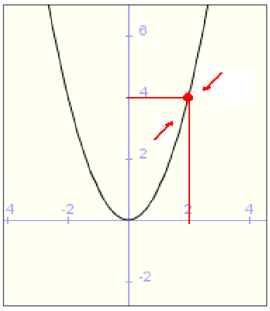
El límit d'una funció *f(x)*, és a dir, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, existirà i el seu valor serà *L*, si i només si els límits laterals existeixen i són iguals, és a dir, els seus valors respectivament són L.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \text{ i } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Exemples:

1) $f(x) = x^2$ *quan* $x_0 = 2$ veiem que $Dom f(x) = \mathbf{R}$

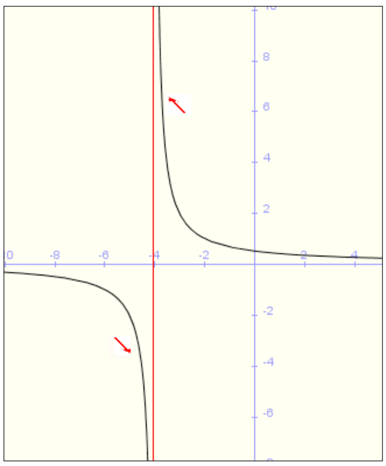
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} x^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} x^2 = 4$$



Imatge 15

2) $f(x) = \dfrac{2}{x+4}$ *quan* $x_0 = -4$ veiem que $Dom f(x) = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{2}{x+4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{2}{x+4} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -4} \dfrac{2}{x+4} = \nexists$$

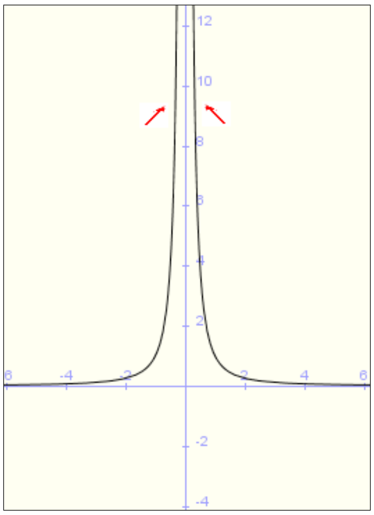


Imatge 16

Nota: Molts cops quan els límits laterals són infinits però no són del mateix signe, es denota per ∞(infinit sense signe).

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ *quan* $x_0=0$ veiem que $Dom f(x)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$

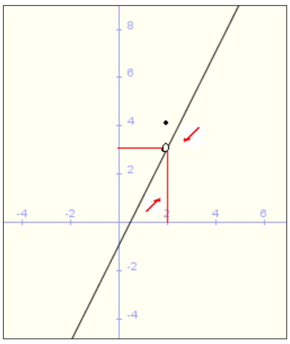
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$$



Imatge 17

4) $f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\quad x\neq 2\\ 4 & si\quad x=2\end{cases}$ *quan* $x_0=2$ veiem que $Dom f(x)=\mathbf{R}$

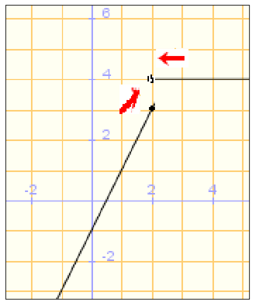
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}2x-1=3\\ \lim\limits_{x\to 2^+}2x-1=3\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$$



Imatge 18

5) $f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\quad x\leq 2\\ 4 & si\quad x>2\end{cases}$ *quan* $x_0=2$ veiem que $Dom f(x)=\mathbf{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} 2x-1=3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} 4=4\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\nexists$$



Imatge 19

Operacions amb 0 i ∞

Límit d'una suma:

+	p	0	+ ∞	– ∞
q	p+q	q	+ ∞	– ∞
0	p	0	+ ∞	– ∞
+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	ind
– ∞	– ∞	– ∞	ind	– ∞

Límit d'un producte:

·	p	0	+ ∞	– ∞
q	p·q	0	± ∞	± ∞
0	0	0	ind	ind
+ ∞	± ∞	ind	+ ∞	– ∞
– ∞	± ∞	ind	– ∞	+ ∞

Límit d'un quocient: (les columnes representen el numerador i les files el denominador)

+	p	0	+ ∞	– ∞
q (q≠0)	p/q	0	± ∞	± ∞
0	límits laterals[1]	0	+ ∞	– ∞
+ ∞	0	0	ind	ind
– ∞	0	0	ind	ind

1 Molts cops se simbolitza amb ∞ (infinit sense signe).

Límit d'una potència: (les columnes representen l'exponent i les files la base)

x^y	p<0	0	1	p>0	+ ∞	– ∞
0	± ∞	ind	0	0	0	0
q<0	q^p	1	q	q^p	$\nexists$	$\nexists$
0<q<1	q^p	1	q	q^p	0	+ ∞
1	1	1	1	1	ind	ind
q>1	q^p	1	q	q^p	+ ∞	0
+ ∞	0	ind	+ ∞	+ ∞	+ ∞	0
– ∞	0	ind	– ∞	± ∞	± ∞	0

Indeterminacions:

Molts cops, a l'hora d'operar, ens trobem amb el que anomenem *indeterminacions*. En aquest punt de càlcul, observem que depèn de com enfoquem l'operació, aquesta pot tenir un resultat o un altre. En són un exemple clar les caselles anteriors , és a dir :

$$\frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ \infty-\infty\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\ 1^{\infty}\ ,\ 0^{0}\ ,\ \infty^{0}$$

Propietats:

Siguin *f(x)* i *g(x)* dues funcions, de manera que existeix $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ per $x_0 \in \mathbf{R}$, llavors:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\log\left(f(x)\right)=\log\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$

Càlcul de límits

Considerem una funció *f(x)*, i volem calcular el valor del límit d'aquesta funció en el punt $x=x_0$. Per tant, avaluarem el valor de la funció en punts propers a x_0, tan propers que considerarem quasi bé el valor x_0.

Exemples:

1) $\lim\limits_{x\to 2} x+1=3$

2) $\lim\limits_{x\to -1} -2x^2+x+2=-1$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x-1=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2+3x=+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x-1=+\infty$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x)-\sin(x)=1$

7) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-3}{x^2}=\dfrac{1}{16}$

8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2}=0$

9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{2}=+\infty$

Hem vist que calcular límits de moltes funcions no és gaire difícil, però, n'hi ha algunes en què el càlcul és més laboriós.

Càlcul de límits de funcions racionals

Considerem $P(x)$ i $Q(x)$ dos polinomis, i volem calcular el límit següent:

$$\lim_{x\to x_o} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_o} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \; ; Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

en què $a_i, b_j \in \mathbf{R}$ $i = 0,\ldots,n$ $\;\; j = 0,\ldots,m$ i $m,n \in \mathbf{N}$.

Distingim dos casos:

- si $x_0 \in \mathbf{R}=(-\infty, +\infty)$
- si $x_0=\pm\infty$

$\boxed{\text{si } x_0 \in \mathbf{R}=(-\infty, +\infty)}$

$$\lim_{x\to x_o} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to x_o} \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \begin{cases} \bullet P(x_0) \;\; \text{qualsevol} \;\; i \;\; Q(x_0) \neq 0 \;\; \text{A} \\ \bullet P(x_0) \neq 0 \;\; i \;\; Q(x_0) = 0 \;\; \text{B} \\ \bullet P(x_0) = 0 \;\; i \;\; Q(x_0) = 0 \;\; \text{C} \end{cases}$$

A $P(x_0)$ *qualsevol* i $Q(x_0) \neq 0$

Es calcula el límit avaluant en punts propers a x_0:

Exemples:

1) $\lim_{x\to 2} \frac{3x}{x+4} = \frac{6}{6} = 1$ $\qquad$ 2) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2+1} = \frac{0}{10} = 0$ $\qquad$ 3) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x-3}{x^4+4x-3x^3+1} = \frac{-4}{1} = -4$

B $P(x_0) \neq 0$ i $Q(x_0) = 0$

Si després de calcular el límit avaluant en punts propers a x_0, estem en aquesta situació, haurem de calcular els límits laterals.

Exemples:

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{0}=\nexists$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=\frac{1'999}{1'999-2}=\frac{1'999}{-0'001}=-\infty\\[2ex]\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=\frac{2'001}{2'001-2}=\frac{2'001}{0'001}=+\infty\end{array}\right\}\text{Els límits laterals són diferents}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{-5}{x^2}=\frac{-5}{0}=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{-5}{x^2}=\frac{-5}{(-0'001)^2}=\frac{-5}{0'000001}=-\infty\\[2ex]\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{-5}{x^2}=\frac{-5}{(0'001)^2}=\frac{-5}{0'000001}=-\infty\end{array}\right\}\text{Els límits laterals són iguals}$$

© $P(x_0)=0$ *i* $Q(x_0)=0$ (ind $\frac{0}{0}$)

Si després de calcular el límit avaluant en punts propers a x_0, estem en aquesta situació, haurem de factoritzar els dos polinomis $P(x)$ i $Q(x)$.

Exemples:

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x+1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{(x+1)}=\lim_{x\to -1}x=-1$$

$$3)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

$\boxed{\text{si } x_0=\pm\infty}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\pm\infty & si\quad n>m \qquad (*)\\ 0 & si\quad n<m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & si\quad n=m\end{cases}$$

(*) El signe ∞ depèn de la paritat de n i m i dels signes dels coeficients a_n *i* b_m.

Exemples:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+3}{x-4}=+\infty \qquad 2)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x}{x^2-4}=-\infty \qquad 3)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^5+3}{x-4}=-\infty$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^4-2x}=0 \qquad 5)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0 \qquad 6)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x-1}{x^3-2x+4}=1$$

Càlcul de límits amb algunes indeterminacions

Sovint, en intentar calcular límits d'algunes funcions, ens trobem amb el que hem anomenat indeterminacions. Tot seguit, explicarem com resoldre'n algunes:

$\boxed{\infty - \infty}$

Vegem-ho en un exemple:

Exemples:

1)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+2}-\frac{x^2}{x-3}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x^2+1)(x-3)}{(x+2)(x-3)}-\frac{x^2(x+2)}{(x+2)(x-3)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+x-3}{x^2-x-6}\right)=-1$$

$\boxed{0\cdot\infty}$

Vegem-ho en un exemple:

Exemple:

1) $\lim_{x\to1}\left((x-1)\cdot\frac{2}{x^2-1}\right)=0\cdot\infty=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{2}{(x+1)}=1$

$\boxed{0^0 \text{ ó } \infty^0}$

En aquest cas utilitzem la propietat : $\lim_{x\to x_0}\log(f(x))=\log\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)$

$\boxed{\frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty}}$

En el cas de quocient de polinomis ja hem vist un mètode per resoldre-ho. En cas de tenir quocient de qualsevol tipus de funció, utilitzarem la regla de l'Hôpital (ho veurem en l'apartat 4.2.).

$\boxed{1^\infty}$

En aquest cas tenim: $\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=1^\infty$

Ho resoldrem utilitzant l'exponencial, ja que aquest límit es pot transformar mitjançant operacions elementals a un límit que ens defineix el nombre *e*. Per tant:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=1^\infty=e^{\lim_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}$$

Exemples:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x+1}=1^{+\infty}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\cdot(x+1)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{x+1}\right)\cdot(x+1)}=e^{\lim_{x\to+\infty}-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

2) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x-1}{3-x}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x-4}{3-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2(x-2)}{(3-x)(x-2)}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{3-x}\right)} = e^{2}$$

Continuïtat

Definició

Direm que una funció $f(x)$: $A\subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és contínua en un punt $x_0\in A$, si els límits laterals quan x tendeix a x_0 i el valor de la funció en el punt x_0 coincideixen, és a dir:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Per tant, una funció $f(x)$ serà contínua si ho és en tots els punts $x_0\in \mathbf{R}$.

Propietats:

1)

Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions contínues en $x_0 \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ f(x)\pm g(x) \text{ és contínua en } x_0. \\ \bullet\ f(x)\cdot g(x) \text{ és contínua en } x_0. \\ \bullet\ \dfrac{f(x)}{g(x)} \text{ és contínua en } x_0 \text{ si } g(x_0)\neq 0. \\ \bullet\ \left(f(x)\right)^{g(x)} \text{ és contínua en } x_0. \end{cases}$

2) Sigui $f(x)$ i $g(x)$ dues funcions, de manera que:

$$A \xrightarrow{f} f(A)\subset B \xrightarrow{g} C$$
$$x_0 \to f(x_0) \to g(f(x_0))=(g\circ f)\ (x_0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } f(x) \text{ és contínua en } x_0 \text{ i} \\ g(x) \text{ és contínua en } f(x_0)\end{array}\right\} \Rightarrow (g\circ f)(x) \text{ és contínua en } x_0$$

3) $f(x)=\sin(x)$ i $g(x)=\cos(x)$ són funcions contínues en $\forall x\in \mathbf{R}$.

4) $f(x)=tg\,(x)$ és contínua en $\forall x\in \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$, $k\in\mathbf{Z}$.

5) Si $f(x)$ és una funció racional, és continua en $\forall x\in \mathbf{R}\backslash$\{els valors de x que anul·len el denominador\}.

6) Si $f(x)$ és una funció polinòmica, és contínua $\forall x \in \mathbf{R}$.

7) Si $f(x)$és una funció exponencial, és contínua $\forall x \in \mathbf{R}$.

8) Si $f(x)$ és una funció logarítmica, és contínua $\forall x \in (0, +\infty)$.

Tipus de discontinuïtats

Definició

Sigui $f(x) : A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funció, i $x_0 \in A$. Direm que la funció $f(x)$ és discontínua en el punt $x=x_0$, si la funció $f(x)$ no és contínua en el punt $x=x_0$.

Tipus de discontinuïtat

Hi ha molts tipus de discontinuïtat. En destacarem tres:

Discontinuïtat evitable: existeixen els límits laterals $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, són nombres reals, però el valor no és igual al de $f(x_0)$.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

Discontinuïtat de salt: existeixen els límits laterals $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, són nombres reals, però aquests no són iguals.

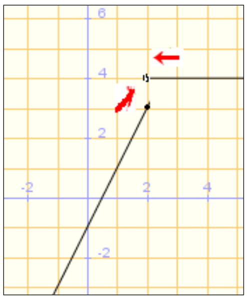
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Discontinuïtat asimptòtica: existeixen els límits laterals $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, el seu valor pot ser $+\infty$ o $-\infty$ i no existeix el valor de $f(x_0)$.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad f(x_0) \text{ no existeix (estaria a l'infinit)}$$

Exemples:

1) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \le 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



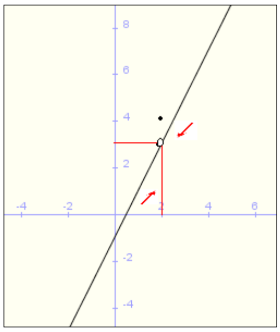
Imatge 20

La funció $f(x)$ està definida a trossos. Si $x \le 2$, tenim que $f(x)=2x-1$, que és contínua per tots els valors $x \le 2$, ja que és una funció polinòmica. Si $x>2$, tenim que $f(x)=4$, que és contínua per tots els valors $x > 2$, ja que és una funció constant. Vegem què passa al punt de salt:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} 2x-1 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} 4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) \ne \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad (3 \ne 4)$$

Així, tenim que $f(x)$ és contínua en $\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{2\}$, on presenta una discontinuïtat de salt en $x=2$.

2) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \ne 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$



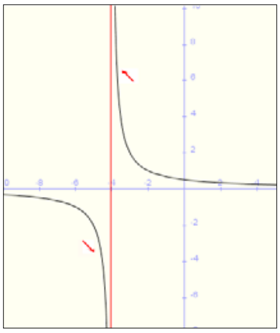
Imatge 21

La funció $f(x)$ està definida a trossos. Si $x\ne2$, tenim que $f(x)=2x-1$, que és contínua per tots els valors $x\ne2$, ja que és una funció polinòmica. Si $x=2$, tenim que $f(x)=4$, que és contínua en aquest punt, ja que és una funció constant. Vegem que passa al punt de salt:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} 2x-1 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1 = 3 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \ne f(2) \quad (3 = 3 \ne 4).$$

Així, tenim que $f(x)$ és contínua en $\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{2\}$, on presenta una discontinuïtat evitable en $x=2$.

3) $f(x) = \dfrac{2}{x+4}$



Imatge 22

La funció $f(x)$ és una funció racional i és contínua en tots els punts menys en els que anul·len el denominador. Per tant:

$x+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-4$ Quan $x=-4$ el denominador s'anul·la

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{2}{x+4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{2}{x+4} = +\infty \\ f(-4) \text{ no existeix} \end{cases}$$

Així, $f(x)$ és contínua en $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-4\}$, on presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x=-4$.

Continuïtat de funcions respecte paràmetres

En aquest apartat, l'objectiu és esbrinar el valor que han de tenir els paràmetres perquè la funció donada sigui contínua, és a dir, hem d'imposar que es compleixi la igualtat següent per a tots els punts.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (definició de continuïtat d'una funció en un punt)

Exemples:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } x<2 \\ x^2+2x-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ què $a \in \mathbf{R}$

La funció $f(x)$ està definida a trossos. Si $x < 2$, tenim que és contínua, ja que és una funció polinòmica. Si $x \geq 2$, també tenim que és contínua perquè és una funció polinòmica. Busquem els valors del paràmetre a perquè la funció sigui contínua al punt de salt.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} 2x + a = 4 + a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x^2 + 2x - 1 = 7 \\ f(2) = 7 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 4 + a = 7 \Rightarrow a = 3$$

Així, tenim que $f(x)$ *és contínua en* $\forall x \in \mathbf{R}$ *si* $a=3$.

2) $\begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en què $a, b \in \mathbf{R}$

La funció $f(x)$ està definida a trossos. En els tres intervals de definició de la funció tenim funcions polinòmiques que són funcions contínues. Busquem, llavors, els valors dels paràmetres a i b, perquè la funció sigui contínua als punts de salt.

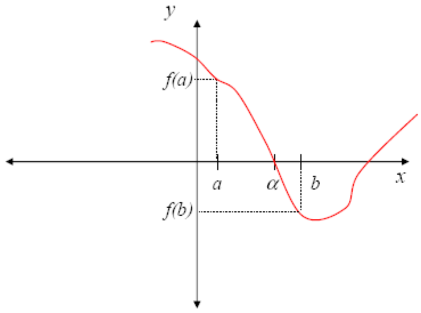
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} 2x + a = -2 + a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} ax + b = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow -2 + a = -a + b$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} ax + b = b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2 + 2 = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow b = 2$$

Llavors, si substituïm el valor de b en la primera equació obtenim:
$-2+a=-a+2 \rightarrow a=2$ i per tant, la funció és contínua $\forall x \in \mathbf{R}$ si $a=2$ i $b=2$.

Teorema de Bolzano

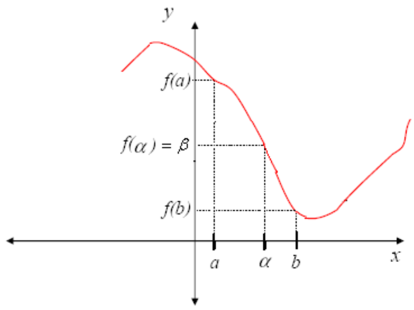
Sigui $f: A\subset\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, contínua en $[a, b]\in A$ i $f(a)\cdot f(b)<0$ llavors $\exists\alpha\in (a, b)$ de manera que $f(\alpha)=0$.



Imatge 23

Teorema del valor intermedi

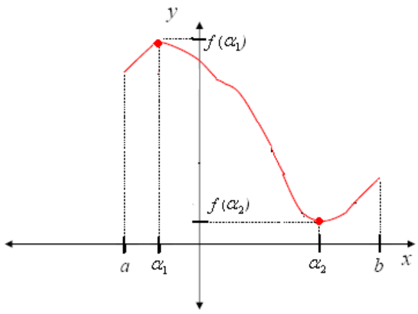
Sigui $f : A\subset\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, contínua en $[a, b]\in A$ i $f(a)\neq f(b)$ llavors $\forall\beta\in [f(a), f(b)]$, $\exists\alpha\in (a, b)$ pertanyent a $\mathbf{R}$ de manera que $f(\alpha)=\beta$.



Imatge 24

Teorema de Weierstrass

Sigui $f: A\subset\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, contínua en $[a, b]\in A$, llavors $f(x)$ té un màxim i un mínim absolut en l'interval $[a, b]$, o sigui, $\exists\alpha_1, \alpha_2\in[a, b]$ de manera que $f(x)\leq f(\alpha_1)$ i $f(x)\geq f(\alpha_2)$ $\forall x\in[a, b]$.



Imatge 25

Nota: En el proper apartat veurem què és un màxim i un mínim absolut.

4.2 Derivada i elasticitat d'una funció

Derivada

Definició

Sigui $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció, i $x_0 \in A$. Direm que f és derivable en x_0, i ho denotarem per $f'(x_0)$, si existeix el límit següent:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Per tant, una funció $f(x)$ serà derivable si ho és en tots els punts $x_0 \in \mathbf{R}$.

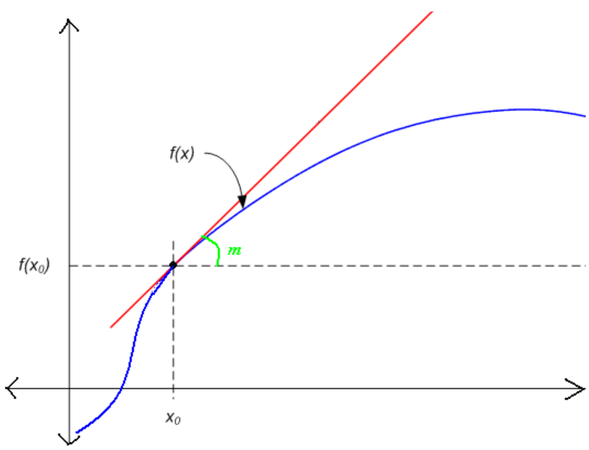
Notació

Normalment ,donada una funció $f(x)$, utilitzarem la notació anterior per indicar la seva derivada però n'hi ha d'altres com:

$$\frac{df(x)}{dx} \quad , \quad y' \quad , \quad \frac{dy}{dx}$$

Interpretació geomètrica

La derivada és un increment la magnitud del qual ens dóna una idea de la rapidesa amb què creix (o decreix) la funció. És a dir, el valor de la derivada en un punt $(x_0, f(x_0))$ és el valor de la pendent m de la recta tangent en aquest punt.



Imatge 26

Les funcions que hem estudiat (polinomis, racionals, trigonomètriques, exponencials i logarítmiques) són funcions derivables en els seus corresponents dominis.

Taula de derivades

Funció	*Derivada*	*Exemple*	
Funció constant			
$f(x)=a$	$f'(x)=0$	$f(x)=8$	$f'(x)=0$
Funcions lineals			
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$	$f(x)=2x$	$f'(x)=2$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$f(x)=4x+3$	$f'(x)=4$
Funcions potencials			
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=ax^n$	$f'(x)=n\cdot a\cdot x^{n-1}$	$f(x)=5x^3$	$f'(x)=15x^2$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x)=\sqrt[3]{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$
Funcions exponencials			
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=a\cdot e^x$	$f'(x)=a\cdot e^x$	$f(x)=3e^x$	$f'(x)=3e^x$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\ln a$	$f(x)=2^x$	$f'(x)=2^x\ln 2$
Funcions logarítmiques			
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\ln(g(x))$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$	$f(x)=\ln(x^2+3x-1)$	$f'(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x-1}$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$	$f(x)=\log_2 x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln 2}$
Funcions trigonomètriques			
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=tgx$	$f'(x)=\sec^2 x=1+tg^2 x$	$f(x)=tgx$	$f'(x)=\sec^2 x=1+tg^2 x$

Propietats

Siguin $f(x)$ i $g(x)$ dues funcions derivables, llavors es compleixen les igualtats següents.

1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

2) $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ en què $k \in \mathbf{R}$.

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

5) *Regla de la cadena*: serveix per derivar funcions composades.

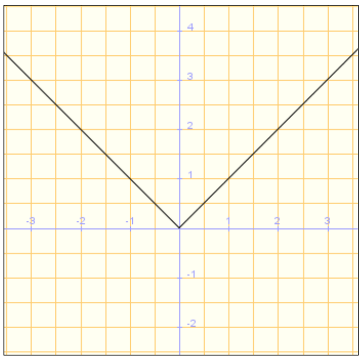
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

6) Si una funció $f(x)$ és derivable en un punt x_0, llavors és contínua en aquest punt.

$$\boxed{\textit{DERIVABLE} \longrightarrow \textit{CONTÍNUA}}$$

El recíproc d'aquesta propietat no és certa: exemple $f(x)=|x|$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$



Imatge 27

Aquesta funció és contínua, ja que està definida per funcions polinòmiques, i en el punt de salt $x=0$ es compleixen les condicions de continuïtat:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \quad \rightarrow \quad 0 = 0 = 0$$

Però observem en derivar $f(x)$, que la funció és derivable en tots els punts menys en $x=0$, ja que les derivades laterals no coincideixen:

$$f'(x)=\begin{cases}1 & si \quad x\geq 0\\ \\ -1 & si \quad x<0\end{cases} \qquad \begin{cases}f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1\\ f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-1\end{cases}$$

$\boxed{\text{DERIVABLE} \;\not\Leftarrow\; \text{CONTÍNUA}}$

Les funcions amb punts angulosos o pics no són derivables en tot el seu domini.

7) Si una funció no és contínua en un punt x_0, llavors no és derivable en aquest punt.

$\boxed{\text{NO CONTÍNUA} \;\Rightarrow\; \text{NO DERIVABLE}}$

Derivades successives

Sigui $f: A\subset \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funció derivable. Definim la segona derivada com la derivada de la funció derivada, que també és una funció real de variable real i pot ser derivable.

Així podríem repetir el procés *n* vegades i definir la *n*-èssima derivada de la funció *f*(*x*) com:

$$f^{n)}(x)=\left(f^{n-1)}(x)\right)'$$

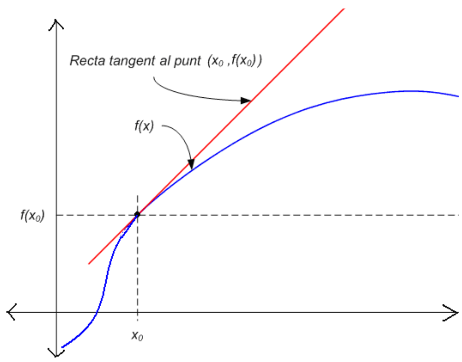
Exemple:

1) $f(x)=3x^3-2x+1 \;\to\; f'(x)=9x^2-2 \;\to\; f''(x)=18x \;\to\; \ldots$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2} \;\to\; f'(x)=\dfrac{x^2-4x-1}{(x-2)^2} \;\to\; f''(x)=\dfrac{10}{(x-2)^3} \;\to\; \ldots$

3) $f(x)=2x+3e^{x^2} \;\to\; f'(x)=2+6xe^{x^2} \;\to\; f''(x)=e^{x^2}(6+12x^2) \;\to\; \ldots$

Recta tangent a una funció en un punt



Imatge 28

Definim la recta tangent en un punt $x_0 \in Domf(x)$ de la funció $f(x)$ com a:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Observem que el seu pendent és $m = f'(x_0)$ i que aquesta passa pel punt $P = (x_0, f(x_0))$

Exemple:

1) Volem trobar la recta tangent a la funció $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en el punt $x = 2$.

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x - 3 \quad \textit{per tant,} \quad f(2) = -1 \quad i \quad f'(x) = 1$$

$$y = -1 + 1 \cdot (x - 2) \quad \rightarrow \quad y = -1 + x - 2 \quad \rightarrow \quad y = x - 3$$

Regla de l'Hôpital

Siguin $f(x)$ i $g(x)$ dues funcions derivables, en què $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ i $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$, o bé, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ i $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (indeterminacions del tipus: $\frac{0}{0}$ o bé $\frac{\infty}{\infty}$). Llavors:

(*Nota:* Aquesta regla es pot aplicar diverses vegades en un mateix límit.)

Exemples:

$$1)\ \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to -1} \frac{2x - 2}{2x - 1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \qquad 2)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

Elasticitat d'una funció

L'elasticitat d'una funció mesura la relació existent entre dos variables sense tenir en compte la unitat de mesura, és a dir, és un indicador adimensional. La derivada mesura variacions absolutes i, en canvi, l'elasticitat mesura variacions relatives.

Definició

Es defineix l'elasticitat d'una funció *f(x)* en un punt x_0, i ho denotarem per $E_x f(x_0)$, el límit:

$$E_x f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x-x_0}{x_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)-f(x_0)) \cdot x_0}{(x-x_0) \cdot f(x_0)} = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$$

Per tant: $E_x f(x_0) = f'(x_0) \cdot \dfrac{x_0}{f(x_0)}$

Tipus d'elasticitats

- $f(x)$ té elasticitat unitària en $x_0 \Leftrightarrow |E_x f(x_0)| = 1$
- $f(x)$ té elasticitat rígida o inelàstica en $x_0 \Leftrightarrow |E_x f(x_0)| < 1$
- $f(x)$ té elasticitat elàstica en $x_0 \Leftrightarrow |E_x f(x_0)| > 1$

Exemples:

1) $f(x) = -x^2 + 4x$ Volem calcular $E_x f(1)$

$$f'(x) = -2x+4 \quad \rightarrow \quad E_x f(1) = f'(1) \cdot \frac{1}{f(1)} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0'\widehat{6}$$

Per tant, en el punt x=1 la funció té elasticitat rígida o inelàstica.

2) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ *Volem calcular* $E_x f(-2)$

$$f'(x) = 2x+2 \quad \rightarrow \quad E_x f(-2) = f'(-2) \cdot \frac{-2}{f(-2)} = -2 \cdot \frac{-2}{1} = 4$$

Per tant, en el punt x=−2 la funció té elasticitat elàstica.

3) $f(x) = 2x$ *Volem calcular* $E_x f(2)$

$$f'(x) = 2 \quad \rightarrow \quad E_x f(2) = f'(2) \cdot \frac{2}{f(2)} = 2 \cdot \frac{2}{4} = 1$$

Per tant, en el punt x=2 la funció té elasticitat unitària.

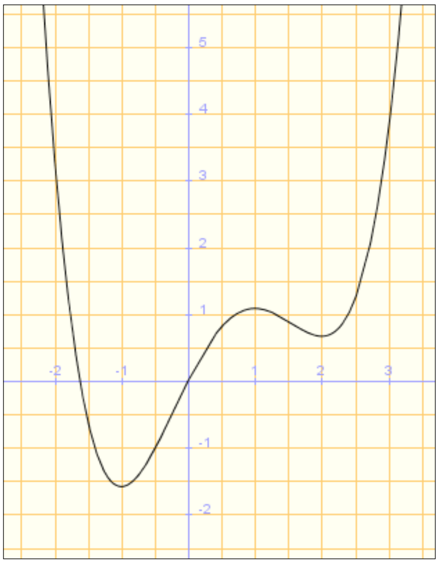
4.3 Extrems absoluts i relatius. Creixement i decreixement

Direm que una funció $f(x)$ és creixent si $\forall x_0, x_1 \in \mathbf{R}$, de manera que $x_0 < x_1$, llavors $f(x_0) \leq f(x_1)$.

Direm que una funció $f(x)$ és decreixent si $\forall x_0, x_1 \in \mathbf{R}$, de manera que $x_0 < x_1$, llavors $f(x_0) \geq f(x_1)$.

Exemple:

1) Considerem una funció amb la gràfica següent:



Imatge 29

Observem que:

Si $x \in (-\infty, +1)$, la funció és decreixent.

Si $x \in (-1, 1)$, la funció és creixent.

Si $x \in (1, 2)$, la funció és decreixent.

Si $x \in (2, +\infty)$, la funció és creixent.

Ens fixem que hi ha una sèrie de punts en què la funció passa de créixer a decréixer o viceversa. Per tant, serà important determinar els intervals de creixement i decreixement i aquests punts de canvi. Aquest procés s'anomena *estudi de la monotonia* d'una funció.

Així, doncs, fent ús de les eines apreses fins ara, podem concloure:

- Si $x_0 \in \mathbf{R}$ i $f'(x_0) > 0$, llavors direm que la funció és creixent en x_0.
- Si $x_0 \in \mathbf{R}$ i $f'(x_0) < 0$, llavors direm que la funció és decreixent en x_0.
- Si $x_0 \in \mathbf{R}$ i $f'(x_0) = 0$, llavors direm que x_0 és un punt singular o estacionari.

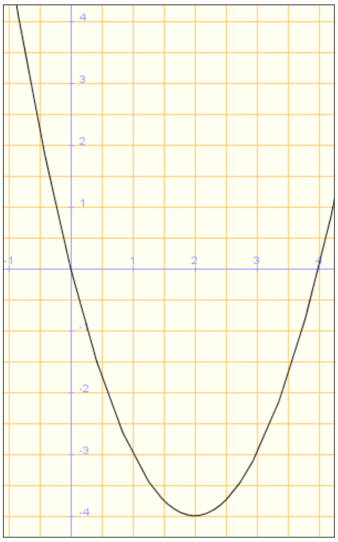
Exemple:

1) $f(x) = x^2 - 4x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x - 4$

$f'(-1) = -6 < 0$ la funció és decreixent en aquest punt.

$f'(3) = 2 > 0$ la funció és creixent en aquest punt.

$f'(2) = 0$ en aquest punt és un punt singular.



Imatge 30

En un punt singular la funció pot presentar un extrem relatiu o un punt d'inflexió.

Un extrem relatiu pot ser un màxim relatiu o un mínim relatiu. També existeixen el que anomenem *extrems absoluts*.

Extrems absoluts

Direm que una funció *f(x)* té un màxim absolut en x_0 si $f(x) \leq f(x_0)$ per tots els $x_0 \in Dom f(x)$.

Direm que una funció *f(x)* té un mínim absolut en x_0 si $f(x) \geq f(x_0)$ per tots els $x_0 \in Dom f(x)$.

Extrems relatius o locals

Direm que una funció *f(x)* té un màxim relatiu en x_0, si i només si $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset Dom f(x)$, en què ε>0.

Direm que una funció $f(x)$ té un mínim relatiu en x_0, si i només si $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset Domf(x)$, en què ε>0.

Un punt d'inflexió és un punt en què la derivada s'anul·la però la funció creix (o decreix) a ambdós costats d'aquest punt.

Punts crítics

Els punts crítics d'una funció $f(x)$ són els possibles candidats a ser màxim, mínim o punt d'inflexió. Aquests es troben:

- En els punts en què la derivada s'anul·la (punts singulars).
- Els punts en què no existeix la derivada (exemple: $f(x) = |x|$).
- En els extrems dels intervals en què estudiem la funció (en el cas que no sigui $\forall x \in \mathbf{R}$)

Estudi de la monotonia

Per estudiar la monotonia d'una funció $f(x)$, necessitem trobar els punts crítics d'aquesta funció.

Com hem vist abans, n'hi ha de tres tipus. Els punts en què no existeix la derivada i els extrems dels intervals en què estudiem la funció són fàcils de trobar; però, com podem trobar els punts singulars?

- Donada una funció $f(x)$, buscarem la seva derivada, tot seguit la igualarem a 0 per trobar els punts singulars.
- Per determinar el tipus de punt singular:

Mètode A: (si la funció no és gaire difícil de derivar) calcularem la segona derivada $f''(x)$ i l'avaluarem als punts singulars:

Si $f''(x_0) < 0$, llavors $f(x)$ presenta un màxim relatiu en x_0.
Si $f''(x_0) > 0$, llavors $f(x)$ presenta un mínim relatiu en x_0.
Si $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) \neq 0$, llavors $f(x)$ presenta un punt d'inflexió en x_0.

Nota: Aquest concepte s'estén per ordre parell i senar de derivació.

Mètode B: (si la funció és complicada de derivar) avaluarem la derivada prenent un punt en cada interval, definits a partir dels punts singulars obtinguts. I depenent de si la funció creix o decreix, conclourem si són màxims mínims o punts d'inflexió.

Exemples:
1) $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$ (Vegeu gràfica 1)

Aquesta funció és derivable $\forall x \in \mathbb{R}$. I com que considerem tota la recta real, no tenim extrems d'intervals en què podem estudiar la funció. Així, doncs, la recerca dels punts crítics es redueix a buscar els punts singulars.

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

$12x^3-24x^2-12x+24=0 \rightarrow 12(x^3-2x^2-x+2)=0 \rightarrow x^3-2x^2-x+2=0$

Per tant, solucions: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$. (Punts singulars)

$f''(x)=36x^2-48x-12$

$f''(1)=-24<0$ Per tant, la funció presenta un màxim relatiu en x=1.

$f''(-1)=72>0$ Per tant, la funció presenta un mínim relatiu en x=−1.

$f''(2)=36>0$ Per tant, la funció presenta un mínim relatiu en x=2.

$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$\searrow$	mínim	$\nearrow$	màxim	$\searrow$	mínim	$\nearrow$
decreixent		creixent		decreixent		creixent

2) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ (Vegeu gràfica 2)

Aquesta funció és derivable $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,3\}$, ja que no és contínua en aquests punts. Per tant, hem de tenir en compte que aquests punts no pertanyen al domini. Així, doncs, la recerca dels punts crítics es redueix a buscar els punts singulars.

$$f'(x)=\frac{-10x}{(x^2-9)^2}$$

$$\frac{-10x}{(x^2-9)^2}=0 \rightarrow -10x=0$$

Per tant, solució: $x=0$ (Punt singular)

$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	0	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
$\nearrow$	$\nearrow$	màxim	$\searrow$	$\searrow$
creixent	creixent		decreixent	decreixent

Com que el càlcul d'una derivada d'una funció racional és més complexa, utilitzarem l'altre mètode.

$f'(-4) = \dfrac{8}{5} > 0$ Per tant, la funció és creixent en el interval $(-\infty, -3)$.

$f'(-1) = \dfrac{5}{32} > 0$ Per tant, la funció és creixent en el interval $(-3, 0)$.

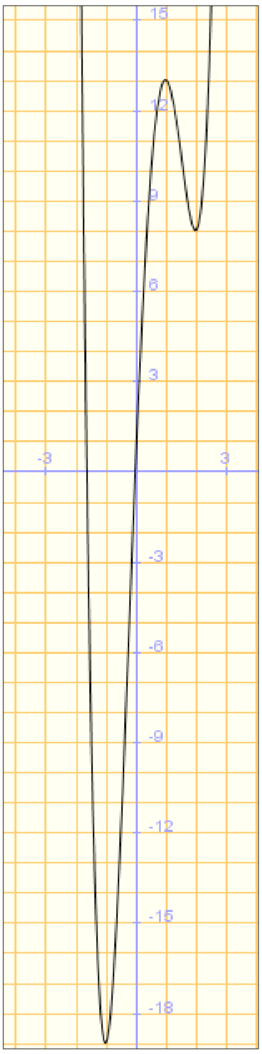
$f'(1) = -\dfrac{5}{32} < 0$ Per tant, la funció és decreixent en el interval $(0, 3)$.

$f'(4) = -\dfrac{8}{5} > 0$ Per tant, la funció és decreixent en el interval $(3, +\infty)$.

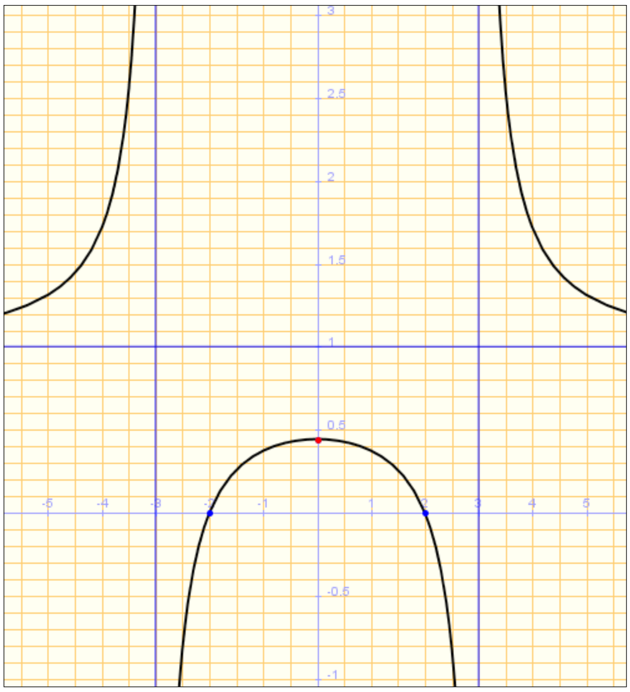
Per tant, en el punt x=0 hi ha un màxim relatiu.

Gràfica 1:

Gràfica 2:



Imatge 31

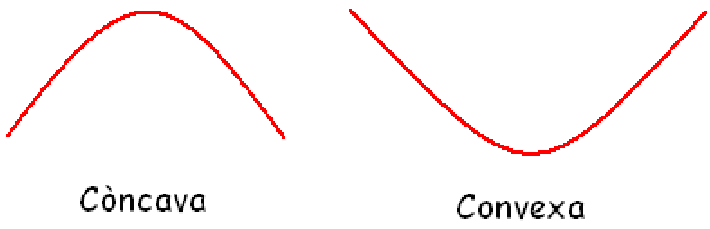


Imatge 32

4.4 Curvatura: concavitat i convexitat

En l'apartat anterior hem definit el concepte de monotonia: creixement i decreixement de funcions. En aquest apartat ens centrarem en la curvatura de les funcions, és a dir, si presenten concavitat o convexitat i en quins intervals.

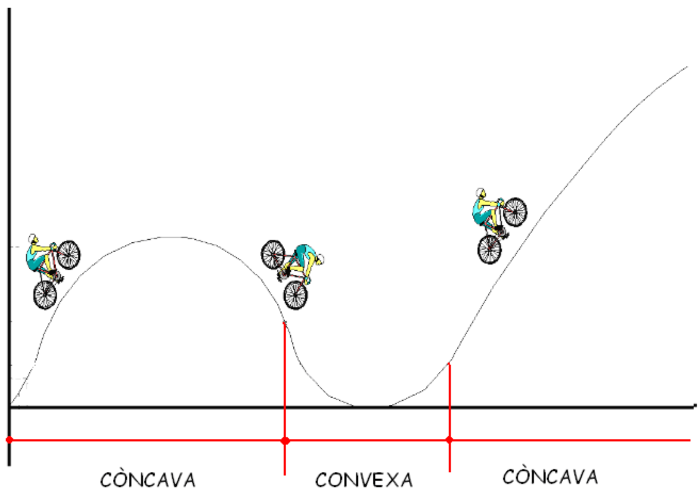
Gràficament la concavitat i la convexitat es visualitzen de la manera següent:



Imatge 33

Nota: En algunes obres existeixen divergències sobre la concavitat i convexitat. Així, doncs, per evitar confusions, podem parlar de *curvatura positiva* o *curvatura negativa*.

Així, doncs, en una gràfica d'una funció, tindrem diferents intervals en els quals aquesta és còncava o convexa:



Imatge 34

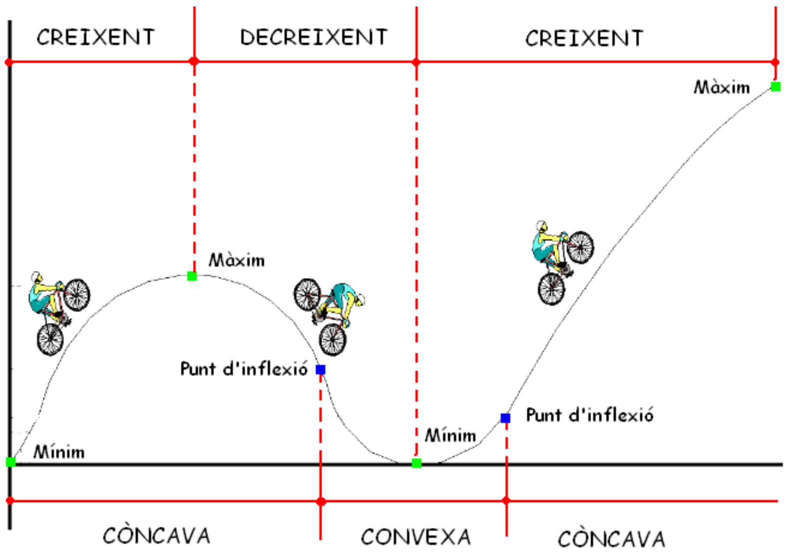
Anteriorment hem definit els punts d'inflexió amb relació a la monotonia d'una funció.

Vegem quin paper tenen amb la curvatura:

Donada una funció $f(x)$ qualsevol, per determinar si aquesta presenta concavitat o convexitat en un cert interval, necessitem, a banda de les eines que ens determinen si és una o l'altra, els extrems dels intervals. Quins són aquest extrems?

Definim, llavors, els punts d'inflexió com els punts de la funció en els quals es produeix un canvi de curvatura, és a dir, passem de còncava a convexa o de convexa a còncava.

Observem al dibuix que si agrupem els coneixements de monotonia i curvatura coneguts fins ara, veiem que hi ha una certa relació.



Imatge 35

Llavors:

- Si hi ha un màxim relatiu en x_0 $(f''(x_0) < 0)$ $\rightarrow$ $f(x)$ és còncava en x_0.
- Si hi ha un mínim relatiu en x_0 $(f''(x_0) > 0)$ $\rightarrow$ $f(x)$ és convexa en x_0.

Com podem trobar els punts d'inflexió? I com podem saber quin tipus de curvatura tenim?

Així, els extrems dels intervals en què se'ns presenten els diferents tipus de curvatura estan delimitats pels extrems de definició de la funció pròpiament dit i pels punts d'inflexió.

Per estudiar la curvatura, procedirem de la manera següent:

- Donada una funció $f(x)$, calcularem la segona derivada, és a dir, $f''(x)$. Posteriorment la igualarem a 0, les solucions de la qual seran els punts d'inflexió.
- Seguidament, definits ja els diferents intervals, avaluarem la segona derivada en qualsevol punt inclòs dins d'aquests intervals i conclourem:

- Si $f''(x_0) < 0$ per a qualsevol x_0 pertanyent a un interval I→ $f(x)$ és còncava en I (curvatura negativa)
- Si $f''(x_0) > 0$ per a qualsevol x_0 pertanyent a un interval I→ $f(x)$ és convexa en I (curvatura positiva)

Nota: Aquest concepte s'estén per ordre parell i senar de derivació.

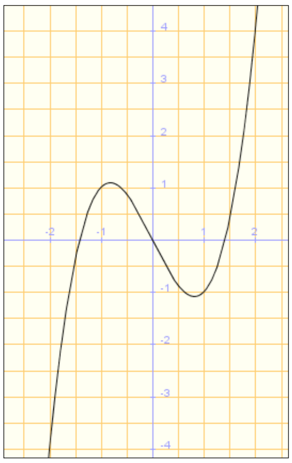
Exemples:
Prenem els exemples anteriors i estudiem la curvatura:

1) $f(x) = x^3 - 2x$
$f'(x) = 3x^2 - 2 \quad \rightarrow \quad f''(x) = 6x \quad \rightarrow \quad f'''(x) = 6$

6x=0 Per tant, solució: x=0. I $f'''(0) = 6 \neq 0$ (Punt d'inflexió)

$f''(-1) = -6 < 0$. Llavors la funció $f(x)$ és còncava en $(-\infty, 0)$ (curvatura negativa)
$f''(1) = 6 > 0$ Llavors la funció $f(x)$ és convexa en $(0, +\infty)$ (curvatura positiva)

$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$\cap$	Punt d'inflexió	$\cup$
còncava		convexa



Imatge 36

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$ (Vegeu gràfica 2)

$f'(x) = \dfrac{-10x}{(x^2 - 9)^2} \quad \rightarrow \quad f''(x) = \dfrac{30x^2 + 90}{(x^2 - 9)^3}$

$\dfrac{30x^2 + 90}{(x^2 - 9)^3} = 0 \quad \rightarrow \quad 30x^2 + 90 = 0$ No hi ha solució; per tant, no hi ha punts d'inflexió.

Però, cal anar en compte amb el domini de la funció! Observem que tenim diferents intervals:

$f''(-4) > 0$. Llavors la funció f(x) és convexa en $(-\infty, 3)$ (curvatura positiva)
$f''(0) < 0$. Llavors la funció f(x) és còncava en $(-3, 3)$ (curvatura negativa)
$f''(4) > 0$. Llavors la funció f(x) és convexa en $(3, +\infty)$ (curvatura positiva)

$(-\infty, 3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$\cup$	$\cap$	$\cup$
convexa	còncava	convexa

4.5 Representació gràfica de funcions

Per representar gràficament una funció *f(x)*, necessitem algun tipus d'informació sobre aquesta funció. Així, prèviament, haurem d'especificar una sèrie de característiques que ens permetin posteriorment "dibuixar–ne" la gràfica sense donar aleatòriament valors a la variable *x*.

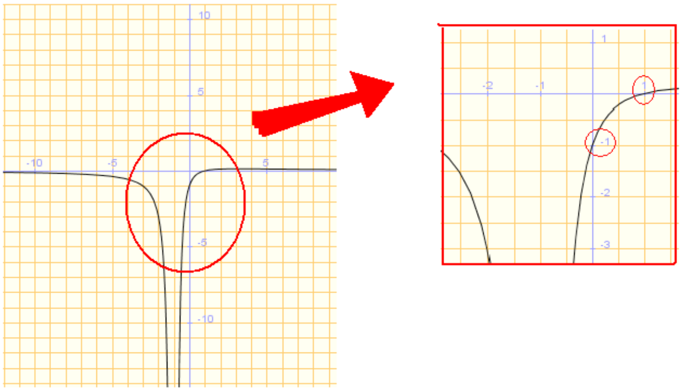
Haurem de donar:

- Domini de la funció (*vist prèviament*).
- Punts de tall amb els eixos.
- Simetries.
- Asímptotes.
- Monotonia: Creixement i decreixement (*vist prèviament*).
- Curvatura: Concavitat i convexitat (*vist prèviament*).

Punts de tall amb els eixos

Vegem-ho amb un exemple:

Considerem la funció: $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ i busquem els punts de tall amb els dos eixos.



Imatge 37

Amb l'eix OX (o eix d'abscisses): → $f(x)=0$ $(y=0)$

Seran els punts de tall de la forma $(x_0, 0)$ en què $x_0 \in \mathbf{R}$.

$\frac{x-1}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$ Per tant, punt $(1, 0)$

Amb l'eix OY(o eix de coordenades): → $x=0$

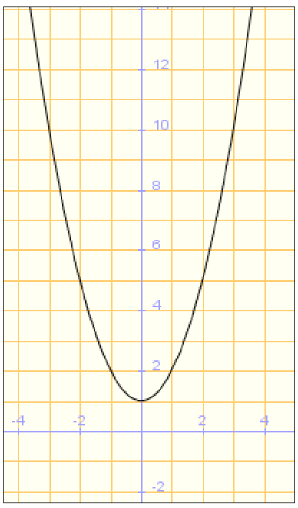
Seran els punts de tall de la forma $(0, f(x_0))$ en què $f(x_0) \in \mathbf{R}$.

$f(x) = \frac{0-1}{(0+1)^2} \rightarrow f(x) = -1$ Per tant, punt $(0, -1)$

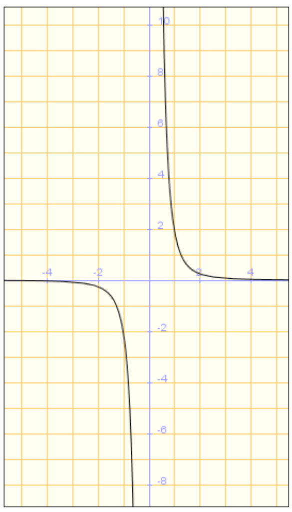
Simetries

Vegem-ho amb uns quants exemples:

Considerem la funció: $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = \frac{2}{x^3}$; busquem possibles simetries.



Imatge 38



Imatge 39

Simetria axial (respecte l'eix 0Y): Si $f(-x)=f(x)$

$$f(-x)=f(x) \rightarrow \begin{cases} f(-x)=(-x)^2=x^2 \\ f(x)=x^2 \end{cases} \rightarrow \text{Hi ha simetria axial.}$$

$$g(-x)=g(x) \rightarrow \begin{cases} g(-x)=\dfrac{2}{(-x)^3}=\dfrac{2}{-x^3} \\ g(x)=\dfrac{2}{x^3} \end{cases} \rightarrow \text{No hi ha simetria axial.}$$

Simetria central (respecte l'origen): Si $f(-x)=-f(x)$

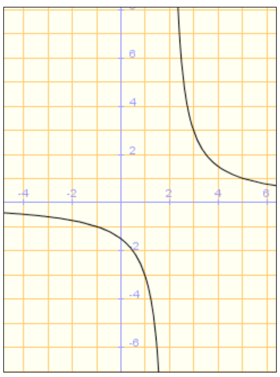
$$f(-x)=-f(x) \rightarrow \begin{cases} f(-x)=(-x)^2=x^2 \\ -f(x)=-x^2 \end{cases} \rightarrow \text{No hi ha simetria axial.}$$

$$g(-x)=-g(x) \rightarrow \begin{cases} g(-x)=\dfrac{2}{(-x)^3}=\dfrac{2}{-x^3}=-\dfrac{2}{x^3} \\ -g(x)=-\dfrac{2}{x^3} \end{cases} \rightarrow \text{Hi ha simetria axial.}$$

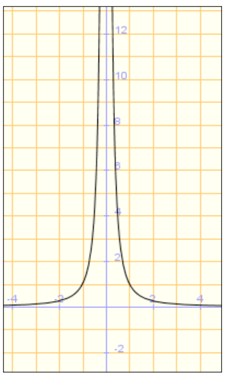
Pot ser que una funció no tingui ni simetria axial ni simetria central.

Asímptotes

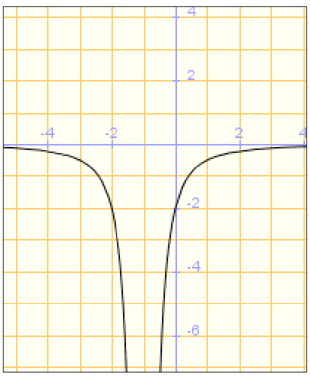
Asímptotes verticals:



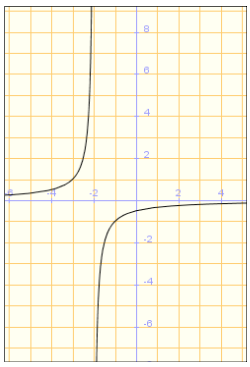
Imatge 40



Imatge 41



Imatge 42



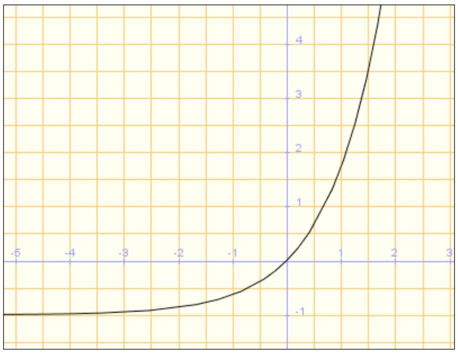
Imatge 43

Normalment es donen en punts que no pertanyen al domini i en els quals tenim discontinuïtat asimptòtica. En el cas de les funcions racionals és dóna normalment en els punts en què s'anul·la el denominador. En aquest punts x_0 observem que:

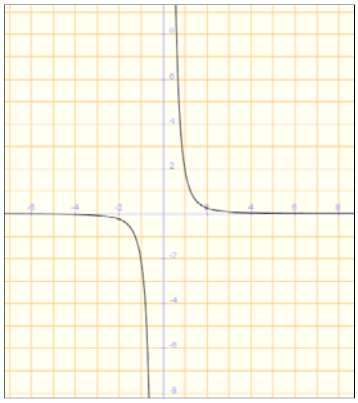
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \rightarrow \text{Hi ha asímptotes verticals en } x = x_0$$

Nota: Recordeu que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ denota que els límits laterals tendeixen a l'infinit però pot ser que aquests siguin de diferent signe.

Asímptotes horitzontals:



Imatge 44



Imatge 45

Si en calcular el límit següent, el resultat és un nombre finit. Aleshores hi ha una asímptota horitzontal en aquest punt x_0.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = x_0 \rightarrow \text{Hi ha asímptotes horitzontals en } x = x_0$$

Asímptotes obliqües:

Si hi ha asímptotes horitzontals, llavors no hi haurà asímptotes obliqües, però en cas que no n'hi hagi, pot ser que tinguem asímptotes obliqües, ja que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \rightarrow \text{Hi ha asímptotes obliqües delimitades per la recta } y = mx + n$$

en què: $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx$

Exemples:

1) $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

Asímptotes verticals:

$\dfrac{x}{x-1} \rightarrow \quad x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$ *Domf(x)*= **R**–{1}

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x}{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x}{x-1}=-\infty\end{cases}$$ Hi ha una asímptota vertical en x=1.

Asímptotes horitzontals:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x-1}=2$ Hi ha una asímptota horitzontal en $f(x)=2$ (o en y=2).

Asímptotes obliqües:

Com que hi ha asímptotes horitzontals, llavors no hi haurà asímptotes obliqües.

2) $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x}$

Asímptotes verticals:

$\dfrac{2x^2+3}{x} \rightarrow \quad x=0$ *Domf(x)*= **R**–{0}

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^2+3}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x^2+3}{x}=-\infty\end{cases}$$ Hi ha una asímptota vertical en x=0.

Asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{x} = \pm\infty$$ No hi ha cap asímptota horitzontal.

Asímptotes obliqües:

Vegem si hi ha asímptotes obliqües delimitades per la recta *y*=*mx*+*n*. Busquem els paràmetres m i n:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x^2+3}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{x^2} = 2 \quad \to \quad m = 2$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{x} - 2x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3-2x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x} = 0 \quad \to \quad n = 0$$

Hi ha asímptotes obliqües delimitades per la recta $y = 2x$.

Tema 5: Integració

Què és integrar?

Integrar una funció és el procés invers de derivar. Per tant, cal conèixer molt bé les diferents derivades de cadascuna de les funcions bàsiques que utilitzem.

Notació

Denotarem com la integral d'una funció $f(x)$ respecte d'una variable x de la manera següent:

$$\int f(x) \quad dx$$

Primitiva d'una funció

Direm que la funció $F(x)$ és la primitiva de la funció $f(x)$ si $f(x)$ és la derivada de $F(x)$, és a dir, $F'(x)=f(x)$.

Exemple:
1) $F(x) = 2x^3 - 5x + 4 \qquad f(x) = 6x^2 - 5$

Observem que $F'(x)=f(x)$, llavors $F(x)$ és la primitiva de $f(x)$.

Ara bé, observem l'aspecte següent:

derivar

$$F(x) = 2x^3 - 5x + 4 \qquad\qquad 6x^2 - 5$$
$$G(x) = 2x^3 - 5x$$

integrar???

Tenim *F(x)* i *G(x)*, dues funcions diferents, i calcularem la seva derivada. Fixem-nos que ambdues funcions *F(x)* i *G(x)* són primitives de la funció $f(x) = 6x^2 - 5$.

Com que hem definit el procés d'integració com l'invers de la derivació, en integrar la funció $f(x) = 6x^2 - 5$, quina funció en resultarà?

Fixem-nos que ambdues funcions *F(x)* i *G(x)* són primitives de la funció $f(x) = 6x^2 - 5$, i que aquestes difereixen d'una constant que posteriorment anomenarem $k \in \mathbf{R}$ com a constant d'integració.

El fet d'incloure aquesta constant d'integració es deu que, en realitzar el procés de derivació, "perdem" un tipus d'informació i ho hem d'indicar. Per tant, la integral de la funció $f(x) = 6x^2 - 5$ és:

$$\int f(x) \quad dx = \int 6x^2 - 5 \quad dx = 2x^3 - 5x + k$$

Teorema fonamental del càlcul integral

Dues primitives d'una mateixa funció es diferencien en una constant, és a dir, la primitiva d'una funció no és única, és més, existeixen infinites primitives d'una funció.

5.1 Càlcul de primitives

Anomenarem *integral indefinida* d'una funció *f(x)*, i la representarem per $\int f(x) \quad dx$, el conjunt de totes les primitives de la funció *f(x)*.

Segons el teorema anterior, si *F(x)* és una primitiva.

$$\int f(x) \quad dx = F(x) + k \quad \text{en què } k \in \mathbf{R}$$

Taula d'integrals immediates

$\int a \ \mathrm{dx}$	$ax + k$
$\int x^n \ \mathrm{dx} \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$\int \frac{1}{x} \ \mathrm{dx}$	$\ln\lvert x\rvert + k$
$\int e^x \ \mathrm{dx}$	$e^x + k$
$\int f(x)^n \cdot f'(x) \ \mathrm{dx} \quad (n \neq -1)$	$\frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \ \mathrm{dx}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + k$

Nota: Aquí només hi són les més importants.

Propietats

Siguin $f(x)$ i $g(x)$ dues funcions i $a \in \mathbf{R}$. Llavors:

$$1) \int f(x) \pm g(x) \ \ dx = \int f(x) \ \ dx \pm \int g(x) \ \ dx$$

$$2) \int a \cdot f(x) \ \ dx = a \cdot \int f(x) \ \ dx$$

Tot seguit veurem alguns mètodes d'integració.

Integració immediata

S'anomena *integració immediata* la integració en què sols fem ús de la taula d'integrals i de les propietats anteriors.

Exemples:

$$1) \int x^2 + 3x - 4 \ \ dx = \int x^2 \ \ dx + \int 3x \ \ dx - \int 4 \ \ dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 4x + k$$

$$2) \int \frac{5}{x} \ \ dx = 5\int \frac{1}{x} \ \ dx = 5\ln\lvert x\rvert + k$$

$$3) \int \frac{2x+1}{x^2+x} \ \ dx = \ln\lvert x^2 + x\rvert + k$$ (Aquesta també es pot fer amb un canvi de variable)

Integració utilitzant el canvi de variable

Aquest mètode d'integració de funcions té com a objectiu principal "simplificar" integrals de funcions que a priori ens semblen complexes.

Per poder dur a terme aquesta "simplificació", se segueix el procés següent:

- Visualitzem la funció que volem integrar i localitzem l'element que considerem complex o que, des del punt de vista de la taula d'integrals immediates, s'assembla a alguna d'aquestes integrals.
- Anomenem a aquest element "complex" com una nova variable (generalment s'utilitza la variable t). També calculem la derivada d'aquest element "complex" (generalment s'utilitza la variable dt).
- Procedim a la substitució dins la nostra integral. I posteriorment la solucionem com una integral immediata.
- Un cop solucionada, desfem el canvi de variable tot substituint la nova variable per l'expressió original.

Exemples:

1) $$\int (3x^2+6x-4)(6x+6)\,dx \underset{(1)}{=} \int t \quad dt = \frac{t^2}{2} + k \underset{(2)}{=} \frac{(3x^2+6x-4)^2}{2} + k$$

(1) Apliquem el canvi de variable:

$$\begin{cases} t = 3x^2 + 6x - 4 \\ dt = 6x + 6 \quad dx \end{cases}$$

(2) Desfem el canvi de variable

2) $$\int \frac{2x+1}{x^2+x} \quad dx \underset{(1)}{=} \int \frac{1}{t} \quad dt = \ln|t| + k \underset{(2)}{=} \ln|x^2+x| + k$$

(1) Apliquem el canvi de variable:

$$\begin{cases} t = x^2 + x \\ dt = 2x + 1 \quad dx \end{cases}$$

(2) Desfem el canvi de variable

Integració per parts

Aquest mètode d'integració s'utilitza quan tenim la integral d'un producte de funcions i on el canvi de variable no ens dóna una via de solució directa.

És a dir, ens trobem en la situació següent:

$$\int f(x)\cdot g'(x) \quad dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) \quad dx$$

Com podem recordar-ho i veure-ho de manera més senzilla?

$$\int \underbrace{f(x)}_{u}\cdot \underbrace{g'(x) \quad dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g(x)}_{v} - \int \underbrace{g(x)}_{v}\underbrace{f'(x) \quad dx}_{du}$$

Per tant:

$$\int u\cdot dv = uv - \int vdu$$

Truc: **U**n **D**ía **V**í **U**na **V**aca **S**olitària **V**estida **D**e **U**niforme.

Evidentment, la tria de quina funció fa el paper de la u i quina la de dv serà convenientment la opció més simple per a càlculs posteriors.

Truc: Existeixen diverses dites mnemotècniques, com ara ALPES: on la funció u serà d'ambdues la que s'enumera primer seguint el següent ordre:

Arcosinus, arcoosinus..., Logaritmes, Polinomis, Exponencials, Sinus, cosinus, tangent...

Exemples:

1) $\int x\cdot \ln(x) \quad dx \underset{(1)}{=} \ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x}{2}dx = \ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x \quad dx =$

$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + k = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + k$

(1) Prenem:

$$\begin{cases} u = \ln(x) & du = \frac{1}{x} \quad dx \\ dv = x \quad dx & v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

2) $\int x^2 e^x \quad dx \underset{(1)}{=} x^2 \cdot e^x - \int e^x 2x \quad dx = x^2 \cdot e^x - 2\int e^x x \quad dx \underset{(2)}{=} x^2 \cdot e^x - 2\left(x \cdot e^x - \int e^x dx\right) =$
$= x^2 \cdot e^x - 2\left(x \cdot e^x - e^x\right) + k = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + k = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + k$

(1) Prenem:

$$\begin{cases} u = x^2 & du = 2x \quad dx \\ dv = e^x \quad dx & v = e^x \end{cases}$$

(2) Prenem: (Quan fem un altre canvi de variable intentem que sigui semblant a l'anterior)

$$\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = e^x \quad dx & v = e^x \end{cases}$$

5.2 Integral definida

Al tema anterior hem vist que la derivada d'una funció té una interpretació geomètrica en concret. Encara que la integral és el procés invers a la derivada, aquesta parteix d'una interpretació geomètrica molt diferent.

Mentre que la derivada ens indica el creixement o decreixement d'una funció, la integral definida ens mesura l'àrea d'una regió delimitada per aquesta funció.

Així, definim la integral definida d'una funció *f(x)*, entre *x=a* (*punt inicial*) i *x=b* (*punt final*), com l'àrea compresa entre la funció i l'eix d'abscisses, i la denotarem i la calcularem de la manera següent:

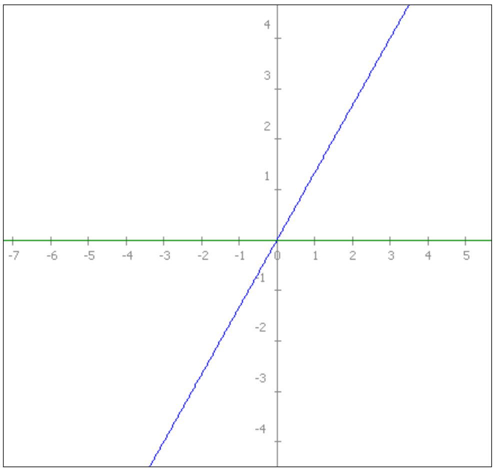
$$\int_a^b f(x) \quad dx = F(b) - F(a)$$

en què *F(a)* i *F(b)* són els valors de la primitiva de *f(x)* en els punts *x=a i x=b* respectivament.

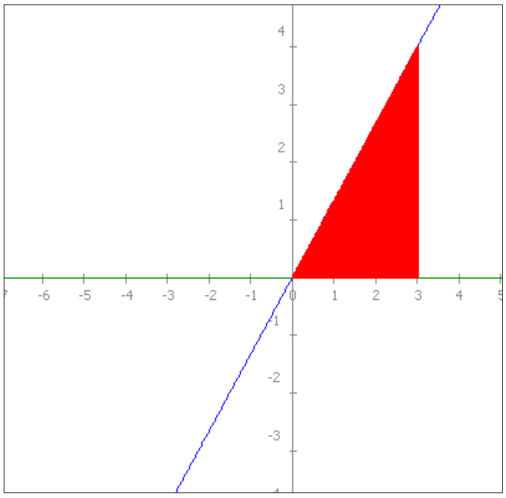
Vegem-ho amb un exemple:

Exemple:

Sigui $f(x) = \frac{4}{3}x$ la funció representada següent:



Imatge 46



Imatge 47

Observem que tenim un triangle i l'àrea d'aquest segons fórmules geomètriques és la següent:

$$A = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ unitats}$$

Observem quan ens dóna si fem la integral de la funció entre els punts x=0 i x=3:

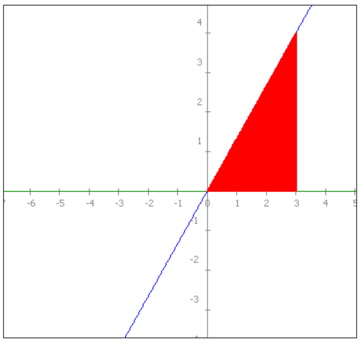
$$\int_0^3 \frac{4}{3}x \quad dx = \frac{4}{3} \cdot \int_0^3 x \quad dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{4}{3}\left[\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{36}{6} = 6 \text{ unitats}$$

Càlcul de l'àrea d'un recinte

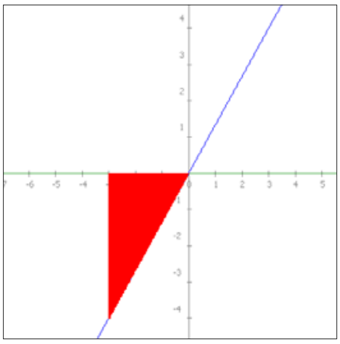
Observem l'exemple següent:

Exemple:

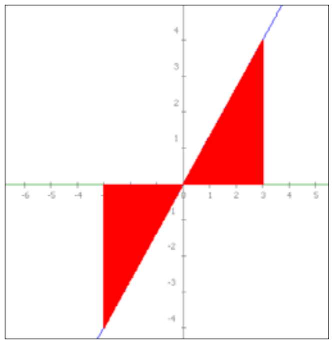
Sigui $f(x) = \frac{4}{3}x$



Imatge 48



Imatge 49



Imatge 50

Volem calcular l'àrea entre $x=-3$ i $x=3$:

$$\int_{-3}^{3}\frac{4}{3}x\ \ dx=\frac{4}{3}\cdot\int_{-3}^{3}x\ \ dx=\frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{3}=\frac{4}{3}\left[\frac{3^2}{2}-\frac{(-3)^2}{2}\right]=\frac{4}{3}\cdot 0=0 \text{ unitats}$$

Observem que això no pot ser. A més, veiem que:

$$\int_{-3}^{0}\frac{4}{3}x\ \ dx=\frac{4}{3}\cdot\int_{-3}^{0}x\ \ dx=\frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0}=\frac{4}{3}\left[\frac{0^2}{2}-\frac{(-3)^2}{2}\right]=\frac{4}{3}\cdot\frac{-9}{2}=\frac{-36}{6}=-6 \text{ unitats}$$

$$\int_{0}^{3}\frac{4}{3}x\ \ dx=\frac{4}{3}\cdot\int_{0}^{3}x\ \ dx=\frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3}=\frac{4}{3}\left[\frac{3^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right]=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{2}=\frac{36}{6}=6 \text{ unitats}$$

L'àrea d'un regió mai no pot ser negativa! D'aquí observem que el signe negatiu no ens indica una àrea negativa, sinó que ens diu que ens trobem per sota de l'eix d'abscisses.

Així, per determinar l'àrea del conjunt dels dos triangles, haurem de prendre el valor absolut del valor de les integrals. D'aquí ve la importància de determinar on ens talla la nostra funció l'eix d'abscisses. Per poder calcular correctament l'àrea:

Per tant:

$$\text{Àrea}=\int_{-3}^{3}\left|\frac{4}{3}x\right|\ \ dx=\left|\int_{-3}^{0}\frac{4}{3}x\ \ dx\right|+\left|\int_{0}^{3}\frac{4}{3}x\ \ dx\right|=|-6|+|6|=12 \text{ unitats}$$

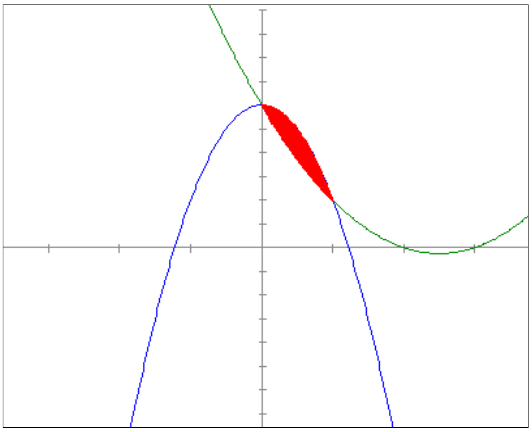
Càlcul de l'àrea entre dues corbes

Suposem ara que tenim dues funcions diferents $f(x)$i $g(x)$. I volem calcular l'àrea que hi ha entre aquestes dues.

Vegem-ho amb un exemple:

Exemple:

Sigui $f(x) = -4x^2 + 6$ i $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Volem calcular l'àrea compresa entre les dues funcions:



Imatge 51
f(*x*) la línia blava
g(*x*) la línia verda

Com ho hem de fer?

Calculem $f(x)-g(x)$.

$$f(x) - g(x) = -4x^2 + 6 - x^2 + 5x - 6 = -5x^2 + 5x$$

Busquem els punts on es tallen aquestes funcions, és a dir, on $f(x)-g(x)=0$.

$$-5x^2 + 5x = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \ \text{ i } \ x_2 = 1$$

Calculem l'àrea d'aquesta funció amb extrems els punts de tall.

$$\int_0^1 -5x^2 + 5x \quad dx = \left[-\frac{5x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right]_0^1 = \left(-\frac{5\cdot 1^3}{3} + \frac{5\cdot 1^2}{2}\right) - \left(-\frac{5\cdot 0^3}{3} + \frac{5\cdot 0^2}{2}\right) = \frac{5}{6} = 0'8\widehat{3} \text{ unitats}$$

EXERCICIS

Exercicis del Tema 1:
Matrius i determinants

1. Al zoològic hi ha dos tipus d'entrades: d'adults i infantils. El dissabte se'n venen 1.200 d'adults i 1.650 d'infantils. El diumenge 1.640 d'adults i 2.300 d'infantils. Doneu la matriu d'entrades del cap de setmana.

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \textit{adult} & \textit{infantil} \end{array} \\ \begin{array}{l} \textit{dissabte} \\ \textit{diumenge} \end{array} & \begin{pmatrix} 1200 & 1650 \\ 1640 & 2300 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. La matriu A expressa els preus de les tarifes aèries entre tres ciutats. Per cap d'any els preus augmenten un 8%, però l'any següent fan una disminució del 3%. Expresseu matricialment la matriu de tarifes de cada any.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 52'5 & 125 \\ 52'5 & 0 & 85'5 \\ 125 & 85'5 & 0 \end{pmatrix}$$

Cap d'any:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 52'5 & 125 \\ 52'5 & 0 & 85'5 \\ 125 & 85'5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4'2 & 10 \\ 4'2 & 0 & 6'84 \\ 10 & 6'84 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 56'7 & 135 \\ 56'7 & 0 & 92'34 \\ 135 & 92'34 & 0 \end{pmatrix}$$

L'any següent:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 56'7 & 135\\ 56'7 & 0 & 92'34\\ 135 & 92'34 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1'7 & 4'05\\ 1'7 & 0 & 2'77\\ 4'05 & 2'77 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 55 & 130'95\\ 55 & 0 & 89'57\\ 130'95 & 89'57 & 0\end{pmatrix}$$

3. Escriu les matrius següents:

a) $A=(a_{ij})_{3x3}$ en què $a_{ii}=1$, $i=1, 2, 3$ i $a_{ij}=0$, $i\neq j$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) $B=(b_{ij})_{2x3}$ en què $b_{ij}=i+j$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

c) $C=(c_{ij})_{3x2}$ en què $c_{ij}=(-1)^{i+j}$

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

4. Considereu les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

1. $(A+B)C=AC+BC$

$$(A+B)C=\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -1 & 5 & 10\end{pmatrix}$$

$$AC+BC=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\-1&3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&4\\0&2&6\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&5&10\end{pmatrix}$$

2. $DA+DB=D(A+B)$

$$DA+DB=\begin{pmatrix}-2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&2\\2&3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\\2&5&2\end{pmatrix}$$
$$D(A+B)=\begin{pmatrix}-2&1\\0&1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\2&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\\2&5&2\end{pmatrix}$$

3. $(AC)^t=C^t\,A^t$

$$(AC)^t=\left(\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}0&0&-2\\-1&3&4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0&-1\\0&3\\-2&4\end{pmatrix}$$
$$C^tA^t=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&3\\-2&4\end{pmatrix}$$

4. $(DB)^t=B^tD^t$

$$(DB)^t=\left(\begin{pmatrix}-2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&2\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\\0&2\end{pmatrix}$$
$$B^tD^t=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}-2&1\\0&1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\\0&2\end{pmatrix}$$

5. $C^t\,(A+B)^t=((A+B)C)^t$

$$C^t(A+B)^t=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\2&5&2\end{pmatrix}^t=$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\1&5\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&5\\2&10\end{pmatrix}$$

$$((A+B)C)^t=\left(\left(\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\right)^t=\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\2&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\right)^t=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&5&10\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&5\\2&10\end{pmatrix}$$

Utilitzant els resultats anteriors, calculeu:

6. D^tBC^t+A

$$D^tBC^t+A=\begin{pmatrix}-2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-8&0\\-4&10&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-8&-1\\-2&13&2\end{pmatrix}$$

7. $C^t(A+B)^tD$

Utilitzem els càlculs de l'apartat 5.

$$C^t(A+B)^tD=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&5\\2&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&6\\-4&12\end{pmatrix}$$

5. Sigui $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de les incògnites x i y perquè es compleixi que $A^2 = A$.

Busquem A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 6 & 3x + 3y \\ -2x - 2y & -6 + y^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x^2 - 6 & 3x + 3y \\ -2x - 2y & -6 + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 6 = x \\ 3x + 3y = 3 \\ -2x - 2y = -2 \\ -6 + y^2 = y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ 3x + 3y = 3 \\ -2x - 2y = -2 \\ y^2 - y - 6 = 0 \end{cases}$ Prenem la primera equació i la quarta i busquem aquests x i y

- $x^2 - x - 6 = 0 \quad \to \quad x_1 = -2 \;\text{ i }\; x_2 = 3 \quad \to \quad y_1 = 3 \;\text{ i }\; y_2 = -2$

Les y s'obtenen a partir de la segona o tercera equació.

- $y^2 - y - 6 = 0 \to \quad y_1 = -2 \;\text{ i }\; y_2 = 3 \quad \to \quad x_1 = 3 \;\text{ i }\; x_2 = -2$

Les x s'obtenen a partir de la segona o tercera equació.

Per tant, tenim dues possibles solucions: $(-2, 3)$ i $(3, -2)$. Si substituïm aquests valors a les quatre equacions inicials o a les matrius A i A^2, veiem que es compleix el que cerquem.

6. Digueu per quins valors de a la matriu següent és simètrica.

$$\begin{pmatrix} a & a^2 - 1 & -3 \\ a + 1 & 2 & a^2 + 4 \\ -3 & 4a & -1 \end{pmatrix}$$

Una matriu és simètrica si $b_{ij} = b_{ji}$ per $i = 1, \ldots, n$ i $j = 1, \ldots, n$. En aquest cas $n = 3$.

Nota: Utilitzem la b_{ij} per indicar cada element de la matriu per no confondre amb la incògnita a.

Per tant, necessitem que:

$$\begin{cases} b_{12} = b_{21} \\ b_{13} = b_{31} \\ b_{23} = b_{32} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - 1 = a + 1 \\ -3 = -3 \\ a^2 + 4 = 4a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - 1 = a + 1 \\ a^2 + 4 = 4a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \\ a^2 - 4a + 4 = 0 \end{cases}$$

Busquem les solucions d'ambdues equacions de segon grau, i obtenim:

$$a^2 - a - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a_1 = -1 \quad \text{i} \quad a_2 = 2$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad a_3 = 2$$

Per tant, el valor que compleix les dues equacions alhora és a=2. Així, la matriu serà simètrica sols si a=2.

7. Calculeu els determinants de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculeu les inverses d'aquestes matrius, recordant que "A té inversa si i només si det(A)≠0".

Calculem primer el determinant de les matrius i després, un cop haguem comprovat que és diferent de 0, calcularem les matrius inverses corresponents:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ , \ |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ , \ |C| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 20 - (-2) = 22 \neq 0$$

Com que els quatre determinats són diferents de 0, existeixen les matrius inverses corresponents. Busquem-les:

$$A^{-1}=\frac{A^C}{|A|}=\frac{A^C}{-2}=\frac{(adj\ A)^t}{-2}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}^t=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{B^C}{|B|}=\frac{B^C}{2}=\frac{(adj\ B)^t}{2}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}6 & 7\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 7\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 6\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & -3\\ 6 & 7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & 7\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 6\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -3 & 1 & -1\\ 18 & -4 & 6\end{pmatrix}^t=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 18\\ 1 & 1 & -4\\ -1 & -1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 9\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3\end{pmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{C^C}{|C|}=\frac{C^C}{4}=\frac{(adj\ C)^t}{4}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}^t=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$D^{-1}=\frac{D^C}{|D|}=\frac{D^C}{22}=\frac{(adj\ D)^t}{22}=\frac{1}{22}\cdot\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}0&1&3\\3&0&2\\1&2&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1&3\\0&0&2\\0&2&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&3\\0&3&2\\0&1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0&1\\0&3&0\\0&1&2\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2&6&-1\\3&0&2\\1&2&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&6&-1\\0&0&2\\0&2&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&3&2\\0&1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2&6\\0&3&0\\0&1&2\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}2&6&-1\\0&1&3\\1&2&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&6&-1\\1&1&3\\0&2&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&0&3\\0&1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2&6\\1&0&1\\0&1&2\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2&6&-1\\0&1&3\\3&0&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&6&-1\\1&1&3\\0&0&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&0&3\\0&3&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2&6\\1&0&1\\0&3&0\end{vmatrix} \end{pmatrix}^t=$$

$$=\frac{1}{22}\cdot\begin{pmatrix}20&4&-2&-6\\2&-4&2&6\\7&8&-4&-1\\-61&-10&16&15\end{pmatrix}^t=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}20&2&7&-61\\4&-4&8&-10\\-2&2&-4&16\\-6&6&-1&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{10}{11}&-\frac{1}{11}&\frac{7}{22}&-\frac{61}{22}\\\frac{2}{11}&-\frac{2}{11}&\frac{4}{11}&-\frac{5}{11}\\-\frac{1}{11}&\frac{1}{11}&-\frac{2}{11}&\frac{8}{11}\\-\frac{3}{11}&\frac{3}{11}&-\frac{1}{22}&\frac{15}{22}\end{pmatrix}$$

8. Calculeu el rang de les matrius següents. En els casos en què aparegui el paràmetre $a\in\mathbf{R}$, discutiu el rang segons els valors del paràmetre.

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&1&-2\\3&0&5&1\\-1&6&3&5\end{pmatrix}$$

Com que la matriu és de 3x4, el menor d'ordre més gran possible que podem escollir és de 3x3. Per tant, com a màxim, aquesta matriu tindrà rang 3.

Prenem un menor d'ordre 1 qualsevol, per exemple: (sovint aquest pas el donarem per suposat)

$$|2|\neq 0$$

Com que existeix algun menor d'ordre 1 diferent de 0, assegurem que la matriu té rang més gran o igual a 1.

Prenem un menor d'ordre 2 qualsevol, tot afegint una fila i una columna al menor anterior, per exemple:

$$\begin{vmatrix}2&-3\\3&0\end{vmatrix}=9\neq 0$$

El seu valor és diferent de 0; per tant, assegurem que el rang de la matriu és igual o més gran que 2.

Finalment prenem un menor d'ordre 3 qualsevol, tot afegint una fila i una columna al menor d'ordre 2 i vegem si el determinant és diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 18 - 60 + 27 = 0$$

Intentem buscar si hi ha algun altre menor d'ordre 3, amb determinant diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 - 36 - 12 + 45 = 0$$

Per tant, com que el menor d'ordre més gran diferent de 0 és d'ordre 2, la matriu tindrà *rg*(*A*)=2.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Com que la matriu és de 3x3, el menor d'ordre més gran possible que podem escollir és de 3x3. Per tant, com a màxim, aquesta matriu tindrà rang 3.

Prenem l'únic menor d'ordre 3:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$$

Busquem en quins casos el determinant és 0:

$a^3 - 3a + 2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad a_1 = 1 \quad a_2 = -2$

- Si $a \neq 1$ o $a \neq -2$ llavors *rg*(*A*)=3, ja que existeix un menor d'ordre 3 diferent de 0.
- Si $a=1$, obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 1, per exemple:

$$|1| \neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 1.
Prenem un menor d'ordre 2, tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Escollim un altre menor d'ordre 2, i observem que tots els menors d'ordre 2 són d'aquesta forma; per tant, $rg(A)=1$

- Si $a=-2$, obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 1, per exemple:

$$|-2| \neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 1.
Prenem un menor d'ordre 2 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

El seu valor és diferent de 0; per tant, $rg(A)=2$

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Com que la matriu és de 4x4, el menor d'ordre més gran possible que podem escollir és de 4x4. Per tant, com a màxim, aquesta matriu tindrà rang 4.

Prenem l'únic menor d'ordre 4:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^4 - 1$$

Busquem en quins casos el determinant és 0:

$a^4 - 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad a_1 = 1 \quad a_2 = -1$

- Si $a \neq 1$ o $a \neq -1$ llavors $rg(A)=4$, ja que existeix un menor d'ordre 4 diferent de 0.
- Si $a=1$, obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 1, per exemple:

$$|1| \neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 1. Prenem un menor d'ordre 2 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 2. Prenem un menor d'ordre 3 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

El determinant és diferent de 0; per tant, $rg(A)=3$.

- Si $a=-1$, obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 1, per exemple:

$$|-1| \neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 1.
Prenem un menor d'ordre 2 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 2.
Prenem un menor d'ordre 3 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

El determinant és diferent de 0; per tant, $rg(A)=3$.

9. Discutiu el rang de les matrius següents segons els valors dels paràmetres a, $b \in \mathbf{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1+a & 1 & 2 \\ 1 & 1+a & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

Com que la matriu és de 3x4, el menor d'ordre més gran possible que podem escollir és de 3x3. Per tant, com a màxim, aquesta matriu tindrà rang 3.

Prenem un menor d'ordre 3:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1+a & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a$$

Busquem en quins casos el determinant és 0:

$$a^2 + 2a = 0 \;\rightarrow\; a(a+2) = 0 \leftrightarrow a_1 = 0 \quad a_2 = -2$$

- Si $a \neq 0$ o $a \neq -2$ llavors rg(A)=3, ja que existeix un menor d'ordre 3 diferent de 0.

- Si a=0, obtenim:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 1, per exemple:

$$|1|\neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 1. Prenem un menor d'ordre 2 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 2. Prenem un menor d'ordre 3 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$$

El determinant és diferent de 0; per tant, $rg(A)$=3.

- Si a=–2, obtenim:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 1, per exemple:

$$|-1|\neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 1. Prenem un menor d'ordre 2 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 2.

Prenem un menor d'ordre 3 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

El determinant és diferent de 0; per tant, $rg(A)=3$.
Per tant, per a qualsevol valor de $a \in \mathbf{R}$ $rg(A)=3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 5 \\ -2 & 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a & b \end{pmatrix}$$

Com que la matriu és de 3x4, el menor d'ordre més gran possible que podem escollir és de 3x3. Per tant, com a màxim, aquesta matriu tindrà rang 3.
Prenem un menor d'ordre 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -2 & 1 & a \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 6a$$

Busquem en quins casos el determinant és 0:

$6a=0 \quad \leftrightarrow \quad a=0$

- Si $a \neq 0$ i $\forall b \in \mathbf{R}$ $rg(A)=3$, ja que existeix un menor d'ordre 3 diferent de 0.
- Si $a=0$, obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 1, per exemple:

$$|1| \neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 1.
Prenem un menor d'ordre 2 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 2.

Prenem un menor d'ordre 3 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & b \end{vmatrix} = 3b+3$$

- Llavors si $a=0$ i $b\neq-1$ $rg(A)=3$.

- Llavors si $a=0$ i $b=-1$ $rg(A)=2$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Com que la matriu és de 3x4, el menor d'ordre més gran possible que podem escollir és de 3x3. Per tant, com a màxim, aquesta matriu tindrà rang 3.

Prenem un menor d'ordre 3:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 11 & 1 \end{vmatrix} = -21a+42$$

Busquem en quins casos el determinant és 0:

$-21a+42=0 \quad \leftrightarrow \quad a=2$

- Si $a\neq2$ i $\forall b\in\mathbf{R}$ $rg(A)=3$, ja que existeix un menor d'ordre 3 diferent de 0.
- Si $a=2$, obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 1, per exemple:

$$|2|\neq0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 1.

Prenem un menor d'ordre 2 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 2.
Prenem un menor d'ordre 3 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 11 & b \end{vmatrix} = 5b - 10$$

- Llavors si $a=2$ i $b\neq 2$ $rg(A)=3$.
- Llavors si $a=2$ i $b=2$ $rg(A)=2$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & 1 & b^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b^3 \end{pmatrix}$$

Com que la matriu és de 4x5, el menor d'ordre més gran possible que podem escollir és de 4x4. Per tant, com a màxim, aquesta matriu tindrà rang 4.

Prenem un menor d'ordre 4:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

Busquem en quins casos el determinant és 0:

$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (a-1)^3 = 0 \leftrightarrow \quad a = 1$$

- Si $a\neq 1$ i $\forall b \in \mathbf{R}$ $rg(A)=4$, ja que existeix un menor d'ordre 4 diferent de 0.
- Si $a=1$, obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b^3 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 1, per exemple:

$$|1| \neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 1.
Prenem un menor d'ordre 2 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - 1$$

- Si $a=1$ i $b\neq 1$, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 2.

Prenem un menor d'ordre 3 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b^3 \end{vmatrix} = 0$$

Com que tots els menors d'ordre 3 són nuls, obtenim que per $a=1$ i $b\neq 1$,
El $rg(A)=2$.

- Si $a=1$ i $b=1$ obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 1, per exemple:

$$|1| \neq 0$$

Per tant, podem assegurar que el rang de la matriu és més gran o igual a 1.
Prenem un menor d'ordre 2 tot afegint una fila i una columna a l'anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Escollim un altre menor d'ordre 2, i observem que tots els menors d'ordre 2 són d'aquesta forma. Per tant, $rg(A)=1$.

10. Comproveu que la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ és ortogonal per $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Podem comprovar-ho imposant que compleixi la condició $A^{-1}=A^{t}$.

- $A^{-1}=A^t$

$$A^t=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} \text{ o sigui si } a=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ llavors, } A^t=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Busquem A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{A^C}{|A|}=\frac{A^C}{2a^2}=\frac{(adj\ A)^t}{2a^2}=\frac{1}{2a^2}\cdot\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & -a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & -a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a \\ a & -a \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t=\frac{1}{2a^2}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 0 & 2a^2 & 0 \end{pmatrix}^t=$$

$$=\frac{1}{2a^2}\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{o sigui si } a=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ llavors, } A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Comprovem que compleix també que $|A|=\pm 1$:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2a^2, \text{ o sigui amb } a=\frac{1}{\sqrt{2}}\ |A|=1.$$

Exercicis del Tema 2:
Sistemes d'equacions lineals

11. Solucioneu els sistemes d'equacions lineals següents.

a) $\begin{cases} x-3y+2z=6 \\ 2x+y-5z=-4 \\ 2x-13y+13z=28 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-3y+2z=6 \\ 2x+y-5z=-4 \\ 2x-13y+13z=28 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=6+3y-2z \\ 2x+y-5z=-4 \\ 2x-13y+13z=28 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=6+3y-2z \\ 2(6+3y-2z)+y-5z=-4 \\ 2(6+3y-2z)-13y+13z=28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=6+3y-2z \\ 7y-9z=-16 \\ -7y+9z=16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=6+3y-2z \\ y=\dfrac{-16+9z}{7} \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=6+3\left(\dfrac{-16+9\lambda}{7}\right)-2\lambda \\ y=\dfrac{-16+9\lambda}{7} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Solució: $x=\dfrac{-6+13\lambda}{7} \quad y=\dfrac{-16+9z}{7} \quad z=\lambda$

b) $\begin{cases} x+y-2z+t+3u=1 \\ 2x-y+2z+2t+6u=2 \\ 3x+2y-4z-3t-9u=3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y-2z+t+3u=1 \\ 2x-y+2z+2t+6u=2 \\ 3x+2y-4z-3t-9u=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-y+2z-t-3u \\ 2x-y+2z+2t+6u=2 \\ 3x+2y-4z-3t-9u=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y + 2z - t - 3u \\ 2(1 - y + 2z - t - 3u) - y + 2z + 2t + 6u = 2 \\ 3(1 - y + 2z - t - 3u) + 2y - 4z - 3t - 9u = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - y + 2z - t - 3u \\ -3y + 6z = 0 \\ -y + 2z - 6t - 18u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y + 2z - t - 3u \\ y = 2z \\ z = \lambda \\ t = -3u \\ u = \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 2\lambda + 3\mu - 3\mu \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \\ t = -3\mu \\ u = \mu \end{cases}$$

Solució: $x = 1 \quad y = 2\lambda \quad z = \lambda \quad t = -3\mu \quad u = \mu$

c) $\begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ x + 2y - z - t = 0 \\ x + 2y - z + 3t = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ x + 2y - z - t = 0 \\ x + 2y - z + 3t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y + z - t \\ x + 2y - z - t = 0 \\ x + 2y - z + 3t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y + z - t \\ (-2y + z - t) + 2y - z - t = 0 \\ (-2y + z - t) + 2y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y + z - t \\ y = \mu \\ z = \beta \\ -2t = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ t = 0 \end{cases}$$

Solució: $x = -2\lambda + \mu \quad y = \lambda \quad z = \mu \quad t = 0$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ 2(1 - y - z) + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y - z \\ -y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ y = -z \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Solució: $x = 1 \quad y = -\lambda \quad z = \lambda$

12. Sigui $A \cdot x = b$ un sistema d'equacions lineals. Justifiqueu que:

1. Si $A \cdot x = b$ té n incògnites i $n+1$ equacions, i el determinant de la matriu ampliada és diferent de 0, aleshores el sistema és incompatible.

   Com que el sistema té n incògnites i n+1 equacions, tindrem que la matriu dels coeficients serà una matriu de n+1 files i n columnes; per tant, una matriu (n+1)xn. Llavors, com a màxim, el seu rang serà n. A més, la matriu ampliada serà una matriu (n+1)x(n+1) i, com que el seu determinant és diferent de 0, tenim que és de rang n+1. Així, quan el rang de la matriu de coeficients no és igual al rang de la matriu ampliada tenim un sistema incompatible.

2. Si $A \cdot x = b$ té més incògnites que equacions, aleshores no pot ser compatible determinat.

   Si té més incògnites que equacions, la matriu de coeficients serà del tipus nxm, en què n<m. I, per tant, la matriu ampliada serà de la forma nx(m+1). En el cas que ambdues tinguessin el mateix rang, com a màxim seria n. Però n≠m, ja que m és més gran; llavors, no pot ser un sistema compatible determinat.

3. Si $A \cdot x = b$ té tantes equacions com incògnites i és compatible determinat, aleshores, canviant-li els termes independents arbitràriament s'obtenen altres sistemes també compatibles determinats.

   Si tenim n incògnites i n equacions, la matriu dels coeficients és del tipus nxn i la matriu ampliada de nx(n+1), com que és un sistema compatible determinat, tenim que el rang d'ambdues matrius és el mateix, és a dir, com a màxim n. Si canviem la columna n+1 de la matriu ampliada, no ens afecta el rang i tampoc ens altera el nombre d'incògnites.

13. Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre $m \in \mathbf{R}$.

$$\begin{cases} (1-m)x + (2m+1)y + (2m+2)z = m \\ mx + my = 2m + 2 \\ 2x + (m+1)y + (m-1)z = m^2 - 2m + 9 \end{cases}$$

Busquem el rang de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada:

$$A=\begin{pmatrix}1-m & 2m+1 & 2m+2\\ m & m & 0\\ 2 & m+1 & m-1\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}1-m & 2m+1 & 2m+2 & m\\ m & m & 0 & 2m+2\\ 2 & m+1 & m-1 & m^2-2m+9\end{pmatrix}$$

Busquem el *rg*(A):

$$\begin{vmatrix}1-m & 2m+1 & 2m+2\\ m & m & 0\\ 2 & m+1 & m-1\end{vmatrix}=-m^3+3m^2-2m$$

$$-m^3+3m^2-2m=0 \iff m(-m^2+3m-2)=0 \iff m=0 \text{ o } -m^2+3m-2=0$$
$$\iff m=0 \text{ o } m=1 \text{ o } m=2$$

Si $m\neq 0$ o $m\neq 1$ o $m\neq 2$ *rg*(A)=3 i *rg*(A,C)=3 i nº incògnites=3 per tant, SCD.

Vegem si $m=0$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 9\end{pmatrix}$$

rg(A)=2 i *rg*(A,C)=3; per tant, SI.

Vegem si $m=1$:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 4\\ 2 & 2 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

rg(A)=2 i *rg*(A, C)=2 i nºincògnites=3 per tant, SCI.

Vegem si $m=2$:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 6\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 6 & 2\\ 2 & 2 & 0 & 6\\ 2 & 3 & 1 & 9\end{pmatrix}$$

rg(A)=2 i *rg*(A, C)=3; per tant, SI.

14. Considereu el sistema lineal

$$\begin{cases}(1+a)x+(1+a)y+z=2\\ x+(1+a)y+z=3\\ 2x-y+z=1+a\end{cases}$$

Estudieu com seran les solucions del sistema segons els valors del paràmetre a.
Resoleu el sistema quan sigui possible.

$$A=\begin{pmatrix}1+a & 1+a & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}1+a & 1+a & 1 & 2\\ 1 & 1+a & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 1+a\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1+a & 1+a & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=a^2+2a \quad així \quad a^2+2a=0 \;\Leftrightarrow\; a(a+2)=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \text{ o } a=-2$$

Si $a\neq 0$ o $a\neq -2$ $rg(A)=3$, $rg(A, C)=3$ i nº incògnites=3; per tant, SCD.
Vegem què passa per $a=0$. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$$

Comprovem que $rg(A)=2$ i $rg(A, C)=3$. I, per tant, SI.
Vegem què passa per $a=-2$. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-3\neq 0$$

Comprovem que $rg(A)=2$ i $rg(A, C)=3$. I, per tant, SI.
Resolem el sistema per Cramer per les a pel qual el sistema és compatible:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1+a & 1\\ 3 & 1+a & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+a & 1+a & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{a-2}{a^2+2} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1+a & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+a & 1+a & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2a-1}{a^2+2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1+a & 1+a & 2\\ 1 & 1+a & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+a & 1+a & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{a^2+6a+3}{a^2+2}$$

15. Discutiu els sistemes d'equacions següents en funció dels paràmetres que hi apareixen.

$$\text{a)}\begin{cases}ax+y+z=1\\ x+ay+z=1\\ x+y+az=1\end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix} \quad (A,C)=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=a^3-3a+2 \quad \textit{així} \;\; a^3-3a+2=0 \;\;\Leftrightarrow\;\; a=1 \text{ o } a=-2$$

Si $a \neq 1$ o $a \neq 2$ $rg(A)=3$, $rg(A, C)=3$ i nº incògnites=3; per tant, SCD.
Vegem què passa per $a=1$. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad (A,C)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=1$ i $rg(A, C)=1$ i nº incògnites=3; per tant, SCI.

Vegem què passa per $a=-2$. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \qquad (A,C)=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=2$ i $rg(A, C)=3$; per tant, SI.

$$\text{b)}\begin{cases}ax+y=2\\ 2x+y=b\end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \qquad (A,C)=\begin{pmatrix}a & 1 & 2\\ 2 & 1 & b\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=a-2 \quad \textit{així} \quad a-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=2$$

Si $a\neq 2$ *i* b qualsevol $rg(A)=2$ $rg(A, C)=2$ i nº incògnites=2; per tant, SCD.
Vegem si $a=2$:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \qquad (A,C)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & b\end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=1$. I per a la matriu ampliada, tenim que:

$$\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & b\end{vmatrix}=2b-4 \quad \textit{així} \quad 2b-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad b=2$$

Per tant: si $a=2$ i $b=2$ $rg(A)=1$ $rg(A,C)=1$ i nº incògnites=2 per tant, SCI.
si $a=2$ i $b\neq 2$ rg(A)=1 $rg(A,C)=2$ per tant, SI.

$$c)\begin{cases}2x+y=0\\ x+2y=1\\ -x+2y=0\end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix} \qquad (A,C)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=2$ i $rg(A, C)=3$; per tant, SI.

$$|2|=2\neq 0 \qquad \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\neq 0 \qquad \begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-5\neq 0$$

$$d)\begin{cases}ax-y+z=1\\ 6x+ay+2z=8\\ 3x+y+z=a+2\end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix}a & -1 & 1\\ 6 & a & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad (A,C)=\begin{pmatrix}a & -1 & 1 & 1\\ 6 & a & 2 & 8\\ 3 & 1 & 1 & a+2\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 6 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 5a + 6 \quad \textit{així} \quad a^2 - 5a + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3 \text{ o } a = 2$$

Si $a \neq 3$ o $a \neq 2$ $rg(A)=3$, $rg(A,C)=3$ i nº incògnites=3; per tant, SCD.
Vegem què passa per $a=3$. Obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A,C) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=2$ i $rg(A, C)=3$; per tant, SI.
Vegem què passa per $a=2$. Obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A,C) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=2$ i $rg(A, C)=2$ i nº incògnites=3; per tant, SCI.

$$e) \begin{cases} my - 1 + x = -z \\ (m-1)z + y - m = -mx \\ m + 1 = x + y + z \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases} \text{(reordenant el sistema)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (A,C) = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m + 1 \quad \textit{així} \quad -m + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1$$

Si $m \neq 1$ $rg(A)=3$, $rg(A, C)=3$ i nº incògnites=3; per tant, SCD.
Vegem què passa per a $m = 1$. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad (A,C)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$$

Comprovem que *rg*(*A*)=2 i *rg*(*A*, C)=3; per tant, SI.

$$f)\begin{cases}2x-5y+z=b\\3x-y+2z=1\\x+4y+az=3\end{cases}\quad A=\begin{pmatrix}2&-5&1\\3&-1&2\\1&4&a\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}2&-5&1&b\\3&-1&2&1\\1&4&a&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2&-5&1\\3&-1&2\\1&4&a\end{vmatrix}=13a-13\quad \textit{així}\ \ 13a-13=0\quad\Leftrightarrow\quad a=1$$

Si *a*≠1 i *b* qualsevol *rg*(*A*)=3, *rg*(*A*, C)=3 i nº incògnites=3; per tant, SCD.
Vegem què passa per $a=1$. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix}2&-5&1\\3&-1&2\\1&4&1\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}2&-5&1&b\\3&-1&2&1\\1&4&1&3\end{pmatrix}$$

Comprovem que *rg*(*A*)=2. I per a la matriu ampliada, tenim que:

$$\begin{vmatrix}2&-5&b\\3&-1&1\\1&4&3\end{vmatrix}=13b+26\qquad \textit{així}\ \ 13b+26=0\quad\Leftrightarrow\quad b=-2$$

Per tant: si *a*=1 i *b*=–2 *rg*(*A*)=2 *rg*(*A*, C)=2 i nº incògnites=3; per tant, SCI.
si *a*=1 i *b*≠–2 *rg*(*A*)=2 *rg*(*A*, C)=3; per tant, SI.

16. Estudieu, segons els valors de *a* i *b*, el sistema següent:

$$\begin{cases}x+y+az=5\\-2x+y+az=-1\\x-y+az=b\end{cases}$$

Comproveu que per $a=1$ i $b=1$, la solució única és $x=2$, $y=2$, $z=1$.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\-2&1&a\\1&-1&a\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}1&1&a&5\\-2&1&a&-1\\1&-1&a&b\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&a\\-2&1&a\\1&-1&a\end{vmatrix}=6a\quad \text{així}\ \ 6a=0\quad\Leftrightarrow\quad a=0$$

Si $a\neq 0$ $rg(A)=3$, $rg(A,C)=3$ i nº incògnites=3; per tant, SCD.
Vegem què passa per $a=0$. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}1&1&0&5\\-2&1&0&-1\\1&-1&0&b\end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=2$. I per a la matriu ampliada tenim que:

$$\begin{vmatrix}1&1&5\\-2&1&-1\\1&-1&b\end{vmatrix}=3b+3\qquad \text{així}\ \ 3b+3=0\quad\Leftrightarrow\quad b=-1$$

Per tant: si $a=0$ *i* $b=-1$ $rg(A)=2$ $rg(A,\ C)=2$ i nº incògnites=3; per tant, SCI.
si $a=0$ *i* $b\neq -1$ $rg(A)=2$ $rg(A,\ C)=3$; per tant, SI.

Resolem el sistema per Cramer i comproveu que per $a=1$ i $b=1$, la solució única és $x=2$, $y=2$, $z=1$.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5&1&1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}}=\frac{12}{6}=2\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&5&1\\-2&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}}=\frac{12}{6}=2\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&5\\-2&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}}=\frac{6}{6}=1$$

17. Al sistema lineal

$$\begin{cases} ax - 2y + z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Determina per quins valors del paràmetre a, el sistema és incompatible, compatible determinat i compatible indeterminat. Resoleu-lo en el cas $a = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A, C) = \begin{pmatrix} a & -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a - 2 \quad \text{així} \quad a^2 - a - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1 \text{ o } a = 2$$

Si $a \neq -1$ *o* $a \neq 2$ $rg(A)=3$, $rg(A, C)=3$ i nº incògnites=3; per tant, SCD.
Vegem què passa per $a=-1$. Obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A, C) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=2$ i $rg(A, C)=3$ per tant, SI.
Vegem què passa per $a=2$. Obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A, C) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=2$ i $rg(A, C)=2$ i nº incògnites=3; per tant, SCI.
Resolem el sistema per Cramer per $a=3$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

18. Classifiqueu el sistema següent segons el valor del paràmetre a.

$$\begin{cases} x + ay + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \end{cases}$$

Resoleu-lo quan es pugui.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix} \quad (A, C) = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6 \quad així \ -a^2 - a + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -3 \text{ o } a = 2$$

Si a≠–3 o a≠2 rg(A)=3, *rg(A, C)*=3 i nº incògnites=3; per tant, SCD.
Vegem què passa per *a*=–3. Obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad (A, C) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprovem que *rg(A)*=2 i *rg(A, C)*=3; per tant, SI.
Vegem què passa per $a = 2$. Obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprovem que *rg(A)*=2 i *rg(A,C)*=2 i nº incògnites=3; per tant, SCI.
Resolem-lo pel cas SCD:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}} = \frac{-a^2 - a + 6}{-a^2 - a + 6} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}} = \frac{-a + 2}{-a^2 - a + 6}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}} = \frac{-a+2}{-a^2-a+6}$$

Resolem-lo pel cas SCI *quan a=2:*

$$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2-2y-3z \\ x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2-2y-3z \\ 2-2y-3z+y-z=1 \\ 2(2-2y-3z)+3y+az=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2-2y-3z \\ -y-4z=-1 \\ -y-4z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2-2y-3z \\ -y-4z=-1 \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5\lambda \\ y=-4\lambda+1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

19. Estudieu com seran les solucions del sistema següent segons els valors dels paràmetres a i b.

$$\begin{cases} ax+3y-z=0 \\ -x+y+2z=1 \\ 4x+11y+z=b \end{cases}$$

Resoleu-lo en el cas $a=b=2$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 11 & 1 \end{pmatrix} \quad (A,C) = \begin{pmatrix} a & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & 1 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 11 & 1 \end{vmatrix} = -21a+42 \quad \textit{així} \quad -21a+42=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=2$$

Si $a \neq 2$ i b qualsevol $rg(A)=3$, $rg(A, C)=3$ i nº incògnites=3 ; per tant, SCD.

Vegem què passa per $a = 2$. Obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 11 & 1 \end{pmatrix} \quad (A,C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Comprovem que *rg*(*A*)=2. I per a la matriu ampliada, tenim que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 11 & b \end{vmatrix} = 5b - 10 \quad \textit{així} \quad 5b - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2$$

Per tant: si *a*=2 *i b*=2 *rg*(*A*)=2 *rg*(*A*, C)=2 i nº incògnites=3; per tant, SCI.
si *a*=2 *i b*≠−2 *rg*(*A*)=2 *rg*(*A*, C)=3; per tant, SI.

Resolem-lo en el cas $a = b = 2$:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ -x + y + 2z = 1 \\ 4x + 11y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x = -1 + y + 2z \\ 4x + 11y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(-1 + y + 2z) + 3y - z = 0 \\ x = -1 + y + 2z \\ 4(-1 + y + 2z) + 11y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y + 3z = 2 \\ x = -1 + y + 2z \\ 15y + 9z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + y + 2z \\ y = \dfrac{2 - 3z}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3 + 7\lambda}{5} \\ y = \dfrac{2 - 3\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases}$$

20. Discutiu les solucions del sistema d'equacions, segons els valors de *m*.

$$\begin{cases} (2m + 2)x + my + 2z = 2m - 2 \\ 2x + (2 - m)y = 0 \\ (m + 1)x + (m + 1)z = m - 1 \end{cases}$$

Resoleu, si és possible, per $m = 1$.

$$A=\begin{pmatrix}2m+2 & m & 2\\ 2 & 2-m & 0\\ m+1 & 0 & m+1\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}2m+2 & m & 2 & 2m-2\\ 2 & 2-m & 0 & 0\\ m+1 & 0 & m+1 & m-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2m+2 & m & 2\\ 2 & 2-m & 0\\ m+1 & 0 & m+1\end{vmatrix}=-2m^3+2m \quad així \quad -2m^3+2m=0 \iff -2m(m^2-1)=0$$

$$m=0 \text{ o } m=1 \text{ o } m=-1$$

Si $m\neq 0$ *o* $m\neq 1$ o $m\neq -1$ $rg(A)=3$, $rg(A, C)=3$ i nº incògnites=3; per tant, SCD.
Vegem que passa per $m=0$. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=2$ i $rg(A, C)=2$ i nº incògniques=3; per tant, SCI.
Vegem que passa per $m=1$. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=2$ i $rg(A, C)=2$ i nº incògniques=3; per tant, SCI.
Vegem què passa per $m=-1$. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad (A,C)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & -4\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=2$ i $rg(A, C)=3$; per tant, SI.
Resoleu, si és possible, per $m=1$.

$$\begin{cases}4x+y+2z=0\\ 2x+y=0\\ 2x+2z=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}4x+y+2z=0\\ 2x+y=0\\ x=-z\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-4z+y+2z=0\\ -2z+y=0\\ x=-z\end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2z=0 \\ y-2z=0 \\ x=-z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-\lambda \\ y=2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

21. Discutiu segons els valors de λ, el caràcter del sistema següent. Resoleu per λ=2.

$$\begin{cases} (3-\lambda)x-y=0 \\ -x+(3-\lambda)y=0 \\ (2-\lambda)z=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad (A,C)=\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+8\lambda^2-20\lambda+16 \quad \textit{així} \ \ -\lambda^3+8\lambda^2-20\lambda+16=0 \ \Leftrightarrow$$

$$\lambda=2 \ \text{ o } \ \lambda=4$$

Si λ≠2 o λ≠4 *rg*(*A*)=3, *rg*(*A*, C)=3 i nº incògnites=3; per tant, SCD.
Vegem què passa per λ=2. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A,C)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprovem que *rg*(*A*)=2 i *rg*(*A*,C)=2 i nº incògnites=3; per tant, SCI.
Vegem què passa per λ=4. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (A,C)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprovem que *rg*(*A*)=1 i *rg*(*A*,C)=1 i nº incògnites=3; per tant, SCI.
Resoleu per λ=2.

$$\begin{cases} x-y=0 \\ -x+y=0 \\ 0=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\mu \\ y=\mu \end{cases}$$

22. Considereu el sistema lineal.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Determineu per a quins valors dels paràmetres a i b, el sistema és compatible determinat, compatible indeterminat i incompatible. Resoleu per a: $a = 3$, $b = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad (A,C) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 \quad \textit{així} \quad a^3 - 3a + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \text{ o } a = -2$$

Si $a \neq 1$ *o* $a \neq -2$ i b qualsevol $rg(A)=3$, $rg(A, C)=3$ i nº incògnites=3; per tant, SCD.

Vegem què passa per $a = 1$. Obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A,C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=1$. I per a la matriu ampliada, tenim que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ però } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - 1 \text{ així } b - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1$$

Per tant: si $a = 1$ i $b = 1$ $rg(A)=1$ $rg(A, C)=1$ i nº incògnites=3; per tant, SCI.

si $a = 1$ i $b \neq 1$ $rg(A)=1$ $rg(A, C)=2$ per tant, SI.

Vegem què passa per $a=-2$. Obtenim:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (A,C) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=2$. I per a la matriu ampliada, tenim que:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3b+6 \quad així \quad 3b+6=0 \quad \Leftrightarrow \quad b=-2$$

Per tant: si $a=-2$ i $b=-2$ $rg(A)=2$ $rg(A, C)=2$ i nº incògnites=3; per tant, SCI.
si $a=-2$ i $b\neq-2$ $rg(A)=2$ $rg(A, C)=3$ per tant, SI.
Resolem-lo per $a=3$, $b=2$.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

23. Considereu el sistema següent

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ 2x+az=b \end{cases}$$

1. Discutiu el caràcter del sistema segons els valors de a i b.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (A,C)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = -2a+4 \quad així \quad -2a+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=2$$

Si $a\neq2$ i b qualsevol $rg(A)=3$, $rg(A, C)=3$ i nº incògnites=3; per tant, SCD.
Vegem que passa per $a=2$. Obtenim:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (A,C)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & b \end{pmatrix}$$

Comprovem que $rg(A)=2$. I per la matriu ampliada, tenim que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & b \end{vmatrix} = -2b+8 \quad \textit{així} \quad -2b+8=0 \;\Leftrightarrow\; b=4$$

Per tant: si $a=2$ i $b=4$ $rg(A)=2$ $rg(A, C)=2$ i nº incògnites=3; per tant, SCI.
si $a=2$ i $b\neq 4$ $rg(A)=2$ $rg(A, C)=3$ per tant, SI.

2. Resoleu-lo per al cas que sigui compatible determinat.
Utilitzarem el mètode de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ b & 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix}} = \frac{-2a+2b}{-2a+4} = \frac{-a+b}{-a+2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix}} = \frac{-2a+b+3}{-2a+4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix}} = \frac{-2b+8}{-2a+4} = \frac{-b+4}{-a+2}$$

3. En el cas que sigui compatible indeterminat, doneu una solució particular de manera que $x=y=z$.

L'únic cas en què el sistema era compatible indeterminat era per $a=2$ i $b=4$.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ 2x+2z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3-y-z \\ 3-y-z-y+z=1 \\ 2(3-y-z)+2z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3-y-z \\ -2y=-2 \\ -2y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3-y-z \\ -2y=-2 \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

Busquem la solució particular de manera que $x=y=z$:

$$x = y = z \quad \Leftrightarrow \quad 2-\lambda = 1 = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1$$

Per tant, la solució particular és $x = 1 \;\; y = 1 \;\; z = 1$

24. Un botiguer compra deu televisors i sis equips de música. D'acord amb el preu marcat, hauria de pagar 10.480 euros. Com que paga al comptat, li fan un descompte del 5% en cada televisor i del 10% en cada equip de música, i només ha de pagar 9.842 euros.

Plantegeu un sistema d'equacions lineals que permet determinar el preu marcat de cada televisor i de cada equip de música. Comproveu que aquests preus són de 820 i 380 euros, respectivament.

$$\begin{cases} 10x + 6y = 10480 \\ 10\cdot 0'95x + 6\cdot 0'9y = 9842 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x + 6y = 10480 \\ 9'5x + 5'4y = 9842 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10480-6y}{10} \\ x = \dfrac{9842-5'4y}{9'5} \end{cases}$$

$$\frac{10480-6y}{10} = \frac{9842-5'4y}{9'5} \rightarrow 99560 - 57y = 98420 - 54y \rightarrow 3y = 1140 \rightarrow y = 380$$

$$x = \frac{10480 - 6\cdot 380}{10} = 820$$

25. Una persona rep una herència dels seus pares de 90.000 euros. Decideix fer-ne dues parts. Amb la primera adquireix un cotxe, i la segona la posa a termini fix del 5% anual. Al cap d'un any ven el cotxe per un import del 25% menys del que va pagar, recupera els diners disposats al banc, i en cobra els interessos, i en total disposa de 85.500 euros.

1. Fes el plantejament del sistema associat.

$$\begin{cases} x + y = 90000 \\ 0'75x + 1'05y = 85500 \end{cases}$$

2. Tenim prou dades per trobar una solució única? Raona la resposta.

Sí, ja que rg(A)=rg(A, C)=nº incògnites=2

3. Prova que les parts fetes són 30.000 euros i 60.000 euros.

$$\begin{cases} x + y = 90000 \\ 0'75x + 1'05y = 85500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 90000 - y \\ 0'75(90000-y) + 1'05y = 85500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 90000 - y \\ 0'3y = 18000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 90000 - 60000 \\ y = 60000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 30000 \\ y = 60000 \end{cases}$$

26. Una botiga ha venut 225 llapis de memòria de tres models diferents, que anomenarem A,B i C, i ha ingressat un total de 10.500 euros. El llapis A costa 50 euros, i els models B i C són, respectivament, un 10% i un 40% més barats que el model A. La suma total de llapis venuts dels models B i C és la meitat que la de llapis venuts del model A. Calculeu quants exemplars s'han venut de cada model.

Considerem:

x= "núm. de llapis del model A"

y= "núm. de llapis del model B"

z= "núm. de llapis del model C"

- Una botiga ha venut 225 llapis de memòria de tres models diferents → $x+y+z=225$
- Ha ingressat un total de 10.500 euros. El llapis A costa 50 euros, i els models B i C són. Respectivament, un 10% i un 40% més barats que el model A → $50x+50\cdot 0'9y+50\cdot 0'6z=10.500$
- La suma total de llapis venuts dels models B i C és la meitat que la de llapis venuts del model A → $y+z=\frac{x}{2}$ → $2y+2z=x$

Així ens queda el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+y+z=225 \\ 50x+45y+30z=10500 \\ -x+2y+2z=0 \end{cases}$$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 50 & 45 & 30 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 45 \neq 0$, podrem aplicar el mètode de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 225 & 1 & 1 \\ 10500 & 45 & 30 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 50 & 45 & 30 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{6750}{45}=150 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 225 & 1 \\ 50 & 10500 & 30 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 50 & 45 & 30 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{2250}{45}=50$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 225 \\ 50 & 45 & 10500 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 50 & 45 & 30 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{1125}{45}=25$$

S'han venut 150 exemplars del model A, 50 del model B i 25 del model C.

Exercicis del Tema 3: L'espai $\mathbf{R}^n$

27. Estudieu si els vectors següents són combinació lineal dels sistemes de vectors corresponents.

1. $v_1 = (1,2,3)$ i el sistema $\{(1, 0, 3), (1, -1, 1), (0, -1, -2)\}$.

$$\alpha_1(1,0,3) + \alpha_2(1,-1,1) + \alpha_3(0,-1,-2) = (1,2,3) \ \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ -\alpha_2 - \alpha_3 = 2 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 - \alpha_2 \\ \alpha_3 = -2 - \alpha_2 \\ 7 \neq 3 \end{cases}$$

El vector $\vec{v}_1$ no es pot posar amb combinació lineal del sistema de vectors corresponent.

2. $v_2 = (7,9)$ i el sistema $\{(1, 0), (1, -1), (0, -1)\}$.

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,-1) + \alpha_3(0,-1) = (7,9) \ \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 7 \\ -\alpha_2 - \alpha_3 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 7 - \lambda \\ \alpha_2 = \lambda \\ \alpha_3 = -9 - \lambda \end{cases}$$

El vector $\vec{v}_2$ sí que es pot posar amb combinació lineal del sistema de vectors corresponent.

3. $v_1 = (a,b,b)$, a, $b \in \mathbf{R}$ i el sistema $\{(-1, 0, 2), (0, 2, 1), (1, 1, 3)\}$.

$$\alpha_1(-1,0,2) + \alpha_2(0,2,1) + \alpha_3(1,1,3) = (a,b,b) \ \rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_3 = a \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = b \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{b - 5a}{9} \\ \alpha_2 = \dfrac{4b - 2a}{9} \\ \alpha_3 = \dfrac{b + 4a}{9} \end{cases}$$

El vector $\vec{v}_1$ sí que es pot posar amb combinació lineal del sistema de vectors corresponent.

28. Considereu els sistemes de vectors de l'exercici anterior i estudieu quins són base dels espais corresponents.

1. $\{(1, 0, 3), (1, -1, 1), (0, -1, -2)\}$
- El nombre de vectors del sistema és igual a la dimensió de l'espai al qual pertanyen.
- Vegem si són l.i.: (utilitzem el rang de la matriu)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

No són l.i.; per tant, no són base de $\mathbf{R}^3$.

2. $\{(1, 0), (1, -1), (0, -1)\}$
- El nombre de vectors del sistema no és igual a la dimensió de l'espai al qual pertanyen. Per tant, no són base de $\mathbf{R}^2$.

3. $\{(-1, 0, 2), (0, 2, 1), (1, 1, 3)\}$
- El nombre de vectors del sistema és igual a la dimensió de l'espai al qual pertanyen.
- Vegem si són l.i.: (utilitzem el rang de la matriu)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

Són l.i.; per tant, sí que són base de $\mathbf{R}^3$.

29. Donats $v_1 = (2, 0, 0), v_2 = (1, 0, 3), v_3 = (1, -1, -1)$, proveu si:

1. v_1, v_2, v_3 formen base de $\mathbf{R}^3$.
- El nombre de vectors del sistema és igual a la dimensió de l'espai al qual pertanyen.
- Vegem si són l.i.: (utilitzem el rang de la matriu)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Són l.i.; per tant, sí que són base de $\mathbf{R}^3$.

2. En cas afirmatiu, calculeu en aquesta base les coordenades de $v = (7,7,7)$.

$$\alpha_1(2,0,0) + \alpha_2(1,0,3) + \alpha_3(1,-1,-1) = (7,7,7) \rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7 \\ -\alpha_3 = 7 \\ 3\alpha_2 - \alpha_3 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 7 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = -7 \end{cases}$$

30. Donat l'espai vectorial $\mathbf{R}^3$ i B={(2, 0, 1) (0, 1, 0) (1, 1, 0)} :

1. Proveu que B és base de $\mathbf{R}^3$.

- El nombre de vectors del sistema és igual a la dimensió de l'espai al qual pertanyen.
- Vegem si són l.i.: (utilitzem el rang de la matriu)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Són l.i.; per tant, B sí que és una base de $\mathbf{R}^3$.

2. Calculeu les coordenades del vector (1, 0, 1) en la base B.

$$\alpha_1(2,0,1) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(1,1,0) = (1,0,1) \rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

31. Trobeu les coordenades dels vectors v_i respecte de les bases corresponents.

1. v_1 = (1, –4, 1) i la base B_1={(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)}.

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,1,1) = (1,-4,1) \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = -4 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = -5 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

2. $v_2 = (0,0,0)$ i la base B_2={(1, −2, −1), (0, 1, 5), (0, −1, 1)}.

$$\alpha_1(1,-2,-1)+\alpha_2(0,1,5)+\alpha_3(0,-1,1)=(0,0,0) \rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 0\\ -2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\\ \alpha_1+5\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\end{cases}$$

3. $v_1 =$ (1, −4, 1) i la base B_2.

$$\alpha_1(1,-2,-1)+\alpha_2(0,1,5)+\alpha_3(0,-1,1)=(1,-4,1) \rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 1\\ -2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=-4\\ -\alpha_1+5\alpha_2+\alpha_3=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=2\end{cases}$$

4. Les coordenades en la base B_2 del vector v_3 de coordenades (5,–5,1) en la base B_1.

Considerem la base canònica a $\mathbf{R}^3$, és a dir, B_3={(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} i busquem les coordenades del vector $\vec{v}_3 =$ (5, −5, 1) en la base B_3 és a dir, $\vec{v}_{3B_3} = (a,b,c)$.

$$\vec{v}_{3B_3} = A_{B_1}\cdot\vec{v}_3 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ -5\\ 1\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}a=1\\ b=-4\\ c=1\end{cases}$$

Per tant, $\vec{v}_{3B_3}$ =(1, −4, 1). Ara busquem les coordenades del vector $\vec{v}_{3B_3} =$ (1, −4, 1) en la base B_2 és a dir, $\vec{v}_{3B_2} = (x,y,z)$.

$$\vec{v}_{3B_1} = A_{B_2}\cdot\vec{v}_{3B_2} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}1\\ -4\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -1\\ -1 & 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=1\\ -2x+y-z=-4\\ -x+5y+z=1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=1\\ y=0\\ z=2\end{cases}$$

Per tant, $\vec{v}_{3B_2} = (1,0,2)$.

32. Suposem que un vector $\vec{v}$ de $\mathbf{R}^3$ té coordenades (1,2,3) respecte de la base canònica. Quines seran les coordenades respecte de la nova base $\{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (1,1,0), \vec{e}_3 = (1,1,1)\}$? Si (−1,−1,3) fossin les coordenades de $\vec{w}$ respecte d'aquesta base nova $\{\vec{e}_i\}$, quines serien les coordenades respecte de la canònica?

- Quines seran les coordenades respecte de la nova base

$B_1 = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (1,1,0), \vec{e}_3 = (1,1,1)\}$?

Considerem la base canònica a $\mathbf{R}^3$, és a dir, $B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ i busquem les coordenades del vector $\vec{v} = (1,2,3)$ en la base B_1 és a dir, $\vec{v}_{B_1} = (x, y, z)$.

$$\vec{v}_{B_1} = A_{B_2} \cdot \vec{v}_{B_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Per tant, $\vec{v}_{B_2} = (-1,-1,3)$

- Si $(-1, -1, 3)$ fossin les coordenades de $\vec{w}$ respecte d'aquesta base nova $\{\vec{e}_i\}$, quines serien les coordenades respecte de la canònica?

Evidentment serien $(1, 2, 3)$, ja que seria el procés invers a l'apartat anterior; tot i així, comprovem-ho:

$$\vec{v}_{B_1} = A_{B_2} \cdot \vec{v}_{B_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Per tant, $\vec{v}_{B_1} = (1,2,3)$

33. Es considera una base $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbf{R}^3$.

1. Demostreu que el conjunt $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ donat per $v_1 = u_1 - u_2$; $v_2 = u_2 + u_3$; $v_3 = u_1 - u_3$ és una altra base.

Considerem $B_1 = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ la base canònica de $\mathbf{R}^3$.

Per tant, $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$:

$$v_1 = u_1 - u_2 = (1,0,0) - (0,1,0) = (1,-1,0)$$
$$v_2 = u_2 + u_3 = (0,1,0) + (0,0,1) = (0,1,1)$$
$$v_3 = u_1 - u_3 = (1,0,0) - (0,0,1) = (1,0,-1)$$

- El nombre de vectors del conjunt $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ és igual a la dimensió de l'espai al qual pertanyen.
- Vegem si són l.i.: (utilitzem el rang de la matriu)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Són l.i.; per tant, sí que són una base de $\mathbf{R}^3$.

2. Si el vector w_1 té coordenades $(2, 1, 1)$ en la base B_1, calculeu les coordenades de w_1 en la base B_2.

Considerem $\vec{w}_{1B_2} = (x, y, z)$.

$$\vec{w}_1 = A_{B_2} \cdot \vec{w}_{1B_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ -x + y = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Per tant, $\vec{w}_{1B_2} = (1,2,1)$

3. Si el vector w_2 té coordenades (1,2,1) en la base B_2, calculeu les coordenades de w_2 en la base B_1.

Considerem $\vec{w}_{2B_1} = (x, y, z)$ les coordenades de w_2 en la base B_1.

$$\vec{w}_{2B_1} = A_{B_2} \cdot \vec{w}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Per tant, $\vec{w}_{B_1} = (2,1,1)$

34. Considerem $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de R^3; definim els vectors $v_1 = u_1 + u_2$; $v_2 = u_2 + u_3$; $v_3 = u_1 + u_3$. Proveu que $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ també és una base de R^3. Si el vector u té coordenades (4,3,5) en la base B_1, trobeu les seves coordenades en la base B_2.

Considerem $B_1 = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ *la base canònica de* R^3.

Per tant, $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$:

$v_1 = u_1 + u_2 = (1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0)$

$v_2 = u_2 + u_3 = (0,1,0) + (0,0,1) = (0,1,1)$

$v_3 = u_1 + u_3 = (1,0,0) + (0,0,1) = (1,0,1)$

- El nombre de vectors del conjunt $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ és igual a la dimensió de l'espai al qual pertanyen.
- Vegem si són l.i.: (utilitzem el rang de la matriu)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Són l.i.; per tant, sí que són una base de **R**^{3}.

Si u té coordenades (4,3,5) en la base B_1, busquem les seves coordenades en la base B_2, és a dir, el vector $u_{B_2} = (x, y, z)$:

$$u = A_{B_2} \cdot u_{B_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + z = 4 \\ x + y = 3 \\ y + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Per tant, $u_{B_2} = (1,2,3)$

35. Indiqueu l'única opció correcta de les quatre que us proposem.

1. Si $\{u,v\}$ és una base de l'espai $\mathbf{R}^n$, llavors

   a) $\{u,v,u+v\}$ són linealment independents.

   b) u i v són ortogonals.

   c) $\{u,v,w\}$ són linealment dependents per a qualsevol w.

   d) dim $\mathbf{R}^n \geq 3$

a) No, perquè si anomenem $w=u+v$, veiem que és combinació lineal de u i v; per tant, tots tres són linealment dependents.

b) No, perquè no hi ha cap tipus d'informació sobre que el producte escalar d'aquests dos vectors sigui 0.

c) Sí ,ja que si els dos vectors formen base, llavors una condició és que aquest dos són linealment independents; a més, com que tenim dos vectors, sabem que la dimensió de l'espai ha de ser també 2, és a dir, estem a $\mathbf{R}^2$,llavors qualsevol altre vector es forma a partir d'una combinació lineal d'aquest.

d) No, perquè, per ser base, una condició era que el nombre de vectors havia de ser igual a la dimensió de l'espai i dim $\mathbf{R}^2 = 2$.

2. En $\mathbf{R}^{2004}$

   a) és possible trobar una base amb 3 vectors.

   b) podem escollir 2.005 vectors linealment independents.

   c) si tenim 2003 vectors linealment independents, podem escollir un altre vector qualsevol i formar una base.

   d) qualsevol base té un nombre parell de vectors.

a) No, perquè necessitem que el nombre de vectors de la base sigui 2.004.

b) No, perquè, com a màxim, podem escollir 2.004 vectors linealment independents.

c) No, perquè el vector que escollim necessàriament ha de ser independent dels 2.003 restant no pot ser qualsevol.

d) Sí, perquè qualsevol base ha de tenir 2.004 vectors i és un nombre parell.

3. Siguin *u, v, w* tres vectors, de manera que $u+2v-w=2u-v+w$. Llavors,

a) *u, v, w* són linealment dependents.

b) No tenim dades suficients per a dir si *u,v,w* són linealment independents o no.

c) No existeixen vectors que compleixin les condicions de l'enunciat.

d) *u, v, w* són linealment independents.

a) Sí, perquè, si reescrivim la igualtat de l'enunciat, obtenim $-u+3v-2w=0$, és a dir, es compleix la condició de vectors linealment dependents.

b) No, perquè si que tenim dades amb la igualtat de l'enunciat obtenim $-u+3v-2w=0$ que ens és suficient.

c) No, perquè sí que existeixen vectors com a tals.

d) No, perquè podem expressar w com a combinació lineal de *u* i *v*, ja que tots tres són vectors linealment dependents.

36. Indiqueu l'opció correcta de les tres que us proposem (només una és certa).

1. Siguin *u,v* dos vectors de manera que $\alpha u+\beta v=0$, per qualsevol α, β nombres reals; aleshores

a) *u, v* són linealment independents.

b) $u=v=0$.

c) no existeixen vectors en aquestes condicions.

a) No, perquè necessàriament $\alpha = \beta = 0$ i no pas qualsevol.

b) Sí , perquè, si els vectors són nuls, es compleix la igualtat sigui quin sigui el valor de α i β.

c) No, perquè si existeixen vectors amb aquestes condicions.

2. Siguin *u, v, w* tres vectors, de manera que $w=u+v$.

a) Si $w=0$, aleshores $\{u,v\}$ són linealment dependents.

b) Si $w\neq0$, aleshores $\{u,v\}$ són linealment independents.

c) $\{u,v\}$ són linealment dependents.

a) Sí, perquè si substituïm $w=0$ a la igualtat, obtenim $0=u+v$; per tant, són vectors linealment dependents.

b) No, perquè que $w\neq0$ no ens indica res sobre $\{u,v\}$.

c) No, perquè sols ens diu que w és combinació lineal d'ambdós però no ens diu res sobre *u* i *v*.

3. Siguin *u, v, w* tres vectors.

a) Si *u, v* són linealment independents, aleshores *w* és combinació lineal de *u* i *v*.

b) Si *u, v, w* són linealment independents, aleshores *u,v* són linealment independents.

c) Si $0u + 0v + 0w = 0$, aleshores *u,v,w* són independents.

a) No, perquè pot ser que w amb u i v siguin linealment independents, llavors no podria expressar-se coma combinació lineal de *u* i *v*.

b) Sí, perquè si tenim tres vectors que entre si són linealment independents, dos qualsevol d'aquests també són linealment independents.

c) No, perquè tots els vectors compleixen aquesta propietat siguin linealment independents o linealment dependents.

4. Siguin *u, v, w* tres vectors ,de manera que *u+v+w=0*.

a) $\{u, v, w\}$ es pot completar fins una base de l'espai.

b) $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ per qualsevol α, β, γ reals.

c) *w* és combinació lineal de *u* i *v*.

a) No, perquè, quan ens referim a espai, diem que és a $\mathbf{R}^3$ i no podem ampliar-ho per formar una base, ja que sols pot tenir tres vectors.

b) No, perquè es contradiu en l'enunciat.

c) Sí, perquè *u+v+w*=0 ens indica que són vectors linealment dependents; per tant, podem expressar el vector w com a combinació lineal de *u* i *v*.

37. Considereu els vectors $v_1 = (2{,}0{,}-1{,}-1)$ i $v_2 = (2{,}2{,}2{,}2)$ de $\mathbf{R}^4$.

1. Proveu que v_1 és ortogonal a v_2.

$< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >= 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = 0$

Per tant, els vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ són ortogonals.

2. Doneu un vector $v_3 = (1, a, 0, b)$ ortogonal a v_1 i v_2.

Perquè $v_3 = (1, a, 0, b)$ sigui ortogonal a la vegada amb v_1 i v_2, s'ha de complir:

$$\begin{cases} < \vec{v}_3, \vec{v}_1 >= 0 \\ < \vec{v}_3, \vec{v}_2 >= 0 \end{cases} \text{ és a dir, } \begin{cases} < (1, a, 0, b), (2{,}0{,}-1{,}-1) >= 0 \\ < (1, a, 0, b), (2{,}2{,}2{,}2) >= 0 \end{cases} \text{ vegem-ho:}$$

$$\begin{cases} 2 - b = 0 \\ 2 + 2a + 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -3 \end{cases}$$

Per tant, $v_3 = (1,-3,0,2)$

3. Doneu un vector $v_4 = (x, y, z, 0)$ de norma 3 i ortogonal a v_1 i v_2.
Imposem que $v_4 = (x, y, z, 0)$ sigui de norma 3:
$\|v_4\| = 3$ és a dir $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 0^2} = 3 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$
Imposem que $v_4 = (x, y, z, 0)$ sigui ortogonal a v_1 i v_2:

$\begin{cases} < \vec{v}_4, \vec{v}_1 >= 0 \\ < \vec{v}_4, \vec{v}_2 >= 0 \end{cases}$ és a dir, $\begin{cases} < (x, y, z, 0), (2, 0, -1, -1) >= 0 \\ < (x, y, z, 0), (2, 2, 2, 2) >= 0 \end{cases}$ vegem-ho:

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ajuntem les tres equacions que hem obtingut:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ 2x - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 2x \\ 2x + 2y + 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 2x \\ y = -3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (-3x)^2 + (2x)^2 = 9 \\ z = 2x \\ y = -3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 9x^2 + 4x^2 = 9 \\ z = 2x \\ y = -3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 9x^2 + 4x^2 = 9 \\ z = 2x \\ y = -3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{9}{14}} \\ z = 2x \\ y = -3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{9}{14}} \\ z = \pm 2\sqrt{\frac{9}{14}} \\ y = \mp 3\sqrt{\frac{9}{14}} \end{cases}$$ Per tant, $v_4 = \left(\pm\sqrt{\frac{9}{14}}, \mp 3\sqrt{\frac{9}{14}}, \pm 2\sqrt{\frac{9}{14}}, 0 \right)$

4. Justifiqueu que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ és una base de $\mathbf{R}^4$.

- El nombre de vectors del conjunt $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ és igual a la dimensió de l'espai al qual pertanyen.
- Vegem si són l.i.: (utilitzem el rang de la matriu)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & \sqrt{\frac{9}{14}} \\ 0 & 2 & -3 & -3\sqrt{\frac{9}{14}} \\ -1 & 2 & 0 & 2\sqrt{\frac{9}{14}} \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & \sqrt{\frac{9}{14}} \\ 0 & 2 & -3 & -3\sqrt{\frac{9}{14}} \\ -1 & 2 & 0 & 2\sqrt{\frac{9}{14}} \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Són l.i.; per tant, sí que són una base de $\mathbf{R}^4$.

38. Un inversor ha d'escollir com distribueix l'import de la seva inversió. En el mercat pot triar entre 3 tipus diferents de fons d'inversió. La composició de cadascun es detalla en la taula següent:

	Renda fixa c/t	*Renda fixa ll/t*	*Renda variable*
Fons A	20%	20%	60%
Fons B	40%	40%	20%
Fons C	60%	40%	0%

La preferència de l'inversor seria invertir de manera que la proporció fos un 40% en renda fixa a curt termini, un 30% en renda fixa a llarg termini i un 30% en renda variable. Hi ha alguna possibilitat de repartir el pressupost de l'inversor entre els 3 fons de manera que obtingui les proporcions desitjades?

Les nostres incògnites són els diferents fons, i volem invertir els diners amb una proporció determinada, així invertim la taula per visualitzar-ho millor i introduïm les dades del problema:

	x	*y*	*z*	
	Fons A	*Fons B*	*Fons C*	
Renda fixa c/t	20%	40%	60%	40%
Renda fixa ll/t	20%	40%	40%	30%
Renda variable	60%	20%	0%	30%

Per tant, queda un sistema d'equacions lineal: $\begin{cases} 0'2x + 0'4y + 0'6z = 0'4 \\ 0'2x + 0'4y + 0'4z = 0'3 \\ 0'6x + 0'2y = 0'3 \end{cases} \rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 0'2 & 0'4 & 0'6 \\ 0'2 & 0'4 & 0'4 \\ 0'6 & 0'2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0'2 & 0'4 & 0'6 \\ 0'2 & 0'4 & 0'4 \\ 0'6 & 0'2 & 0 \end{vmatrix} = -0'04 \neq 0$$

Per tant, podem aplicar el mètode de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0'4 & 0'4 & 0'6 \\ 0'3 & 0'4 & 0'4 \\ 0'3 & 0'2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0'2 & 0'4 & 0'6 \\ 0'2 & 0'4 & 0'4 \\ 0'6 & 0'2 & 0 \end{vmatrix}} = 0'5 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0'2 & 0'4 & 0'6 \\ 0'2 & 0'3 & 0'4 \\ 0'6 & 0'3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0'2 & 0'4 & 0'6 \\ 0'2 & 0'4 & 0'4 \\ 0'6 & 0'2 & 0 \end{vmatrix}} = 0 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0'2 & 0'4 & 0'4 \\ 0'2 & 0'4 & 0'3 \\ 0'6 & 0'2 & 0'3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0'2 & 0'4 & 0'6 \\ 0'2 & 0'4 & 0'4 \\ 0'6 & 0'2 & 0 \end{vmatrix}} = 0'5$$

Per tant, invertirà el 50% dels diners en el Fons A i el 50% en el Fons C.

Exercicis del Tema 4:
Funció real de variable real

39. Calculeu els límits laterals següents:

a) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{1'0001-1} = \dfrac{1}{0'0001} = +\infty$

b) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x} = \dfrac{|1'999-2|}{1'999} = \dfrac{0'001}{1'999} = 0$

c) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{-0'001}}} = \dfrac{1}{1+e^{-\infty}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$

d) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{0'001}}} = \dfrac{1}{1+e^{+\infty}} = \dfrac{1}{1+\infty} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

40. Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-5x+1}{3x+7} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{3x} = +\infty$

b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{8x^3\cdot 9x^2}{x^5} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{72x^5}{x^5} = 72$

c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \dfrac{(x-1)}{(x+2)} = \dfrac{-2}{1} = -2$

d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x+2)}{(x^2+2x+3)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right) = \infty - \infty = \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{1-x^3} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(-x^2-x-1)} =$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{x+2}{-x^2-x-1} = \dfrac{3}{-3} = -1$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x = 1^{+\infty} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+2}-1\right)\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2+2}\right)\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+2}} = e^0 = 1$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{\frac{x^2}{2}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2}{x^2-3x+4} = 3$

41. Estudieu la continuïtat de les funcions següents i, en cas de ser discontínues, digueu de quin tipus de discontinuïtat es tracta:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

Aquesta funció és una funció racional que és contínua en tots els punts menys els valors de *x* que anul·len el denominador.

$x-2=0 \;\rightarrow\; x=2$

Llavors *f(x)* és continua ∀*x*∈**R**\{2}. Vegem quin tipus de discontinuïtat:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{(1'999)^2}{1'999-2} = \dfrac{3'996001}{-0'001} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{(2'001)^2}{2'001-2} = \dfrac{4'004001}{0'001} = +\infty \\ f(2) \text{ no existeix} \end{cases} \rightarrow \text{ Discontinuïtat asimptòtica en } x=2$$

b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Aquesta funció és una funció racional que és contínua en tots els punts menys els valors de x que anul·len el denominador.

$|x| = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Llavors *f(x)* és continua ∀*x*∈**R**\{0}. Vegem quin tipus de discontinuïtat:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{-0'001}{|-0'001|} = -1 \\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{0'001}{|0'001|} = 1 \end{cases} \rightarrow \text{ Discontinuïtat de salt en } x=0$$

c) $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$

Aquesta funció és una funció racional que és contínua en tots els punts menys els valors de x que anul·len el denominador.

$$1 + x = 0 \quad \to \quad x = -1$$

Llavors $f(x)$ és continua $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{=-1\}$. Vegem quin tipus de discontinuïtat:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1+x^3}{1+x} = \dfrac{1+(-1'001)^3}{1-1'001} = \dfrac{-0'003003001}{-0'001} = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1+x^3}{1+x} = \dfrac{1+(-0'999)^3}{1-0'999} = \dfrac{0'002997001}{0'001} = 3 \\ f(-1) \;\; \textit{no està definit} \end{cases} \to \text{Discontinuïtat evitable en } x=-1$$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

Aquesta funció és una funció racional que és contínua en tots els punts menys els valors de x que anul·len el denominador. A més, en el numerador tenim una arrel quadrada que no està definida per valors negatius del radicand.

$$\begin{cases} 7+x<0 \\ x^2-4=0 \end{cases} \to \begin{cases} x<-7 \\ x=\pm 2 \end{cases}$$

Llavors $f(x)$ és continua $\forall x \in [-7,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$.
Vegem quin tipus de discontinuïtat:
Per $x<-7$ tenim que no pertanyen al domini de la funció
Per $x= -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \dfrac{\sqrt{7-2'001}-3}{(-2'001)^2-4} = \dfrac{-0'76415564}{0'004001} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \dfrac{\sqrt{7-1'999}-3}{(-1'999)^2-4} = \dfrac{-0'763708426}{-0'003999} = +\infty \\ f(-2) \;\; \textit{no existeix} \end{cases}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x= -2$

Per x= 2:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \dfrac{\sqrt{7+1'999}-3}{(1'999)^2-4} = \dfrac{-0'000166671}{-0'003999} = 0'04\widehat{6} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \dfrac{\sqrt{7+2'001}-3}{(2'001)^2-4} = \dfrac{0'000166662}{0'004001} = 0'04\widehat{6} \\ f(2) \ \textit{no està definit} \end{cases}$$

Discontinuïtat evitable en x=2

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{e^x}$

Aquesta funció és una funció racional que és contínua en tots els punts menys els valors de x que anul·len el denominador. Però el denominador no s'anul·la per cap valor de $x \in \mathbf{R}$, ja que la funció exponencial sempre és positiva.

Per tant, la funció és contínua $\forall x \in \mathbf{R}$.

f) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

Aquesta funció és exponencial que és contínua en tota la recta real. L'exponent o índex de l'exponencial és una funció racional, la qual presentarà problemes en els valors que anul·len el denominador.

$$x+1=0 \ \rightarrow \ x=-1$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{1}{-1'001+1}} = e^{\frac{1}{-'001}} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{1}{-0'999+1}} = e^{\frac{1}{0'001}} = e^{+\infty} = +\infty \end{cases} \rightarrow \text{Discontinuïtat de salt infinit en } x=-1$$

Per tant, la funció és contínua $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

g) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

Aquesta funció és exponencial i és contínua en tota la recta real. L'exponent o índex de l'exponencial és una funció racional, la qual presentarà problemes en els valors que anul·len el denominador.

$$x^2 = 0 \ \rightarrow \ x = 0$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{(-0'001)^2}} = e^{-\frac{1}{0'000001}} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{(0'001)^2}} = e^{-\frac{1}{0'000001}} = e^{-\infty} = 0 \\ f(0) \quad no \quad existeix \end{cases} \rightarrow \text{Discontinuïtat evitable en } x=0$$

Per tant, la funció és contínua $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

h) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$

Aquesta funció és una funció racional que és contínua en tots els punts menys els valors de x que anul·len el denominador.

$1+e^{\frac{1}{1-x}} = 0 \quad \rightarrow \quad e^{\frac{1}{1-x}} = -1$ Però la funció exponencial és una funció positiva,és a dir, no hi ha cap valor de x que faci que en avaluar la funció resulti un nombre negatiu.

Per tant, amb el denominador de la funció racional no tenim problemes de continuïtat.

Observem, però, que l'exponencial que es troba dins la funció racional té un exponent que és una altra funció racional. Aquesta serà contínua en tots els punts menys els valors de x que anul·len el denominador.

$1-x=0 \quad \rightarrow \quad x=1$

Vegem què passa en aquest punt:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-0'999}}} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{0'001}}} = \dfrac{1}{1+e^{+\infty}} = \dfrac{1}{1+\infty} = \dfrac{1}{+\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-1'001}}} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{-0'001}}} = \dfrac{1}{1+e^{-\infty}} = \dfrac{1}{1+0} = 1 \end{cases}$$

Discontinuïtat de salt a $x=1$

Per tant, la funció és contínua $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

42. Trobeu la recta tangent a la funció $f(x)=\ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ en el punt $x_0=\frac{1}{2}$.

Hem de trobar la recta: $y=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

Així, haurem de buscar $f\left(\frac{1}{2}\right)$ i $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)=\ln\left(\frac{3}{5}\right)\approx -0'5108$$

$$f'(x)=\frac{\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}=\frac{\frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2}}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}=\frac{\frac{-4x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}=\frac{-4x(1+x^2)}{(1+x^2)^2(1-x^2)}=$$
$$=\frac{-4x}{(1+x^2)(1-x^2)}=\frac{-4x}{1-x^4}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-4\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{-2}{\frac{15}{16}}=-\frac{32}{15}$$

Llavors:

$$y=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=-0'5108-\frac{32}{15}\left(x-\frac{1}{2}\right)=-0'5108-\frac{32}{15}x+\frac{16}{15}=-2'1\widehat{3}x+0'5558$$
$$y=-2'1\widehat{3}x+0'5558$$

43. Sigui $f(x)=e^{4x}\sqrt{2x}$. Calculeu l'elasticitat $E_x f(x)$ en el punt $x_0=\frac{1}{2}$.

$$E_x f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}}{f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{4\cdot\frac{1}{2}}\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}}=e^2$$

$$f'(x)=e^{4x}\cdot 4\cdot\sqrt{2x}+e^{4x}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x}}=e^{4x}\left(4\sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{4\frac{1}{2}}\left(4\sqrt{2\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\frac{1}{2}}}\right)=5e^2$$

Llavors: $E_x f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{\frac{1}{2}}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=5e^2\,\dfrac{\frac{1}{2}}{e^2}=\dfrac{5}{2}$

44.

a) Donades les funcions $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^{\frac{3}{2}}$ i $h(x)=f(x)\times g(x)$, calculeu $E_x f(x_0)$, $E_x g(x_0)$, $E_x h(x_0)$.

- $E_x f(x_0)=f'(x_0)\cdot\dfrac{x_0}{f(x_0)}=-\dfrac{1}{x_0^2}\cdot\dfrac{x_0}{\frac{1}{x_0}}=-\dfrac{x_0^2}{x_0^2}=-1$

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\quad\rightarrow\quad f'(x_0)=-\dfrac{1}{x_0^2}$

- $E_x g(x_0)=g'(x_0)\cdot\dfrac{x_0}{g(x_0)}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x_0}\,\dfrac{x_0}{x_0^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{3}{2}x_0^{\frac{1}{2}+1-\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}x_0^0=\dfrac{3}{2}$

$g'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\quad\rightarrow\quad g'(x_0)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x_0}$

- $E_x h(x_0)=h'(x_0)\cdot\dfrac{x_0}{h(x_0)}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2}$

$h(x)=f(x)\cdot g(x)=\dfrac{1}{x}\cdot x^{\frac{3}{2}}=x^{-1+\frac{3}{2}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\quad\rightarrow\quad h(x_0)=\sqrt{x_0}$

$h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\quad\rightarrow\quad h'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$

b) Feu el mateix amb les funcions $f(x)=x^2$ i $g(x)=e^x$.

- $E_x f(x_0) = f'(x_0) \cdot \dfrac{x_0}{f(x_0)} = 2x_0 \cdot \dfrac{x_0}{x_0^2} = 2$

$f'(x) = 2x \quad \rightarrow \quad f'(x_0) = 2x_0$

- $E_x g(x_0) = g'(x_0) \cdot \dfrac{x_0}{g(x_0)} = e^{x_0} \dfrac{x_0}{e^{x_0}} = x_0$

$g'(x) = e^x \quad \rightarrow \quad g'(x_0) = e^{x_0}$

- $E_x h(x_0) = h'(x_0) \cdot \dfrac{x_0}{h(x_0)} = e^{x_0}(2x_0 + x_0^2) \cdot \dfrac{x_0}{x_0^2 e^{x_0}} = e^{x_0} \cdot \dfrac{x_0^2(2+x_0)}{x_0^2 e^{x_0}} = e^{x_0} \cdot \dfrac{(2+x_0)}{e^{x_0}} = 2 + x_0$

$h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 e^x \quad \rightarrow \quad h(x_0) = x_0^2 e^{x_0}$

$h'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2) \quad \rightarrow \quad h'(x_0) = e^{x_0}(2x_0 + x_0^2)$

c) Estan relacionades $E_x f(x_0)$, $E_x g(x_0)$, $E_x h(x_0)$? En cas afirmatiu, podríeu demostrar aquesta relació?

Sí, estan relacionats $\qquad E_x h(x_0) = E_x f(x_0) + E_x g(x_0)$

Demostració:

$$E_x h(x_0) = h'(x_0) \cdot \frac{x_0}{h(x_0)} = \left(f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)\right) \cdot \frac{x_0}{f(x_0) \cdot g(x_0)} =$$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot x_0}{f(x_0) \cdot g(x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) \cdot x_0}{f(x_0) \cdot g(x_0)} + \frac{f(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot x_0}{f(x_0) \cdot g(x_0)} =$$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot x_0}{f(x_0)} + \frac{g'(x_0) \cdot x_0}{g(x_0)} = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} + g'(x_0) \cdot \frac{x_0}{g(x_0)} = E_x f(x_0) + E_x g(x_0)$$

d) Atesos els resultats anteriors, quant val l'elasticitat de $f(x) = x$? I l'elasticitat de $f(x) = x^\alpha$?

Calculem l'elasticitat de la funció *f(x)*: $E_x f(x_0) = f'(x_0) \cdot \dfrac{x_0}{f(x_0)} = 1 \cdot \dfrac{x_0}{x_0} = 1$

$f'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad f'(x_0) = 1$

Utilitzem la relació que hem trobat a l'exercici anterior, canvio el nom de la funció per evitar confusions amb la notació. Així, doncs, tenim:

$$g(x) = x^\alpha = \overbrace{x \cdot \quad \ldots \quad \cdot x}^{\alpha \ \ vegades} = \overbrace{f(x) \cdot \quad \ldots \quad \cdot f(x)}^{\alpha \ \ vegades}$$

Per tant: $E_x g(x_0) = \overbrace{E_x f(x_0) + \ldots + E_x f(x_0)}^{\alpha \text{ vegades}} = \overbrace{1 + \ldots + 1}^{\alpha \text{ vegades}} = \alpha$

45.

a) Donades les funcions $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = x^2$ i $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, calculeu $E_x f(x_0)$, $E_x g(x_0)$, $E_x h(x_0)$.

- $E_x f(x_0) = f'(x_0) \cdot \dfrac{x_0}{f(x_0)} = 2e^{2x_0} \cdot \dfrac{x_0}{e^{2x_0}} = 2x_0$

$f'(x) = 2e^{2x} \quad \rightarrow \quad f'(x_0) = 2e^{2x_0}$

- $E_x g(x_0) = g'(x_0) \cdot \dfrac{x_0}{g(x_0)} = 2x_0 \cdot \dfrac{x_0}{x_0^2} = 2$

$g'(x) = 2x \quad \rightarrow \quad g'(x_0) = 2x_0$

- $E_x h(x_0) = h'(x_0) \cdot \dfrac{x_0}{h(x_0)} = \dfrac{2e^{2x_0}(x_0 - 1)}{x_0^3} \cdot \dfrac{x_0}{\frac{e^{2x_0}}{x_0^2}} = \dfrac{2e^{2x_0}(x_0 - 1)x_0^3}{e^{2x_0} x_0^3} = 2(x_0 - 1) = 2x_0 - 2$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{2x}}{x^2} \quad \rightarrow \quad h(x_0) = \frac{e^{2x_0}}{x_0^2}$$

$$h'(x) = \frac{2e^{2x}x^2 - e^{2x}2x}{x^4} = \frac{2e^{2x}(x-1)}{x^3} \quad \rightarrow \quad h'(x_0) = \frac{2e^{2x_0}(x_0 - 1)}{x_0^3}$$

b) Demostreu que, per a dues funcions derivables $f(x)$ i $g(x)$, es compleix la igualtat següent:

$$E_x \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = E_x f(x_0) - E_x g(x_0)$$

Definim: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Demostració:

$$E_x h(x_0) = h'(x_0) \cdot \frac{x_0}{h(x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \cdot \frac{x_0}{\frac{f(x_0)}{g(x_0)}} =$$

$$= \frac{(f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0))}{(g(x_0))^2} \cdot \frac{g(x_0)x_0}{f(x_0)} = \frac{(f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0))}{g(x_0)} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} =$$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) \cdot x_0 - f(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot x_0}{g(x_0) \cdot f(x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) \cdot x_0}{g(x_0) \cdot f(x_0)} - \frac{f(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot x_0}{g(x_0) \cdot f(x_0)} =$$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot x_0}{f(x_0)} - \frac{g'(x_0) \cdot x_0}{g(x_0)} = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} - g'(x_0) \cdot \frac{x_0}{g(x_0)} = E_x f(x_0) - E_x g(x_0)$$

46.

a) Considereu les funcions $f(x)=e^x$ i $g(x)=ln(x)$. Calculeu l'elasticitat de f al punt $x_0=\frac{1}{2}$ i l'elasticitat de g al punt $x_0=e^{\frac{1}{2}}$.

- $$E_x f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=e^{\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=e^x \quad\rightarrow\quad f'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}$$

x_0

- $$E_x g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=g'\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}}}{g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}=2$$

$$g'(x)=\frac{1}{x} \quad\rightarrow\quad g'\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$$

b) Considereu les funcions $f(x)=x^{-3}$ i $g(x)=x^{-\frac{1}{3}}$. Calculeu les elasticitats de f i g en x_0.

- $$E_x f(x_0)=f'(x_0)\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}=-3x_0^{-4}\frac{x_0}{x_0^{-3}}=-3x_0^{-4+1+3}=-3$$

$$f'(x)=-3x^{-4} \quad\rightarrow\quad f'(x_0)=-3x_0^{-4}$$

x_0

- $$E_x g(x_0)=g'(x_0)\cdot\frac{x_0}{g(x_0)}=-\frac{1}{3}x_0^{-\frac{4}{3}}\cdot\frac{x_0}{x_0^{-\frac{1}{3}}}=-\frac{1}{3}x_0^{-\frac{4}{3}+1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}$$

$$g'(x)=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \quad\rightarrow\quad g'(x_0)=-\frac{1}{3}x_0^{-\frac{4}{3}}$$

c) Tenint en compte que en els apartats anteriors g es la funció inversa de f. Trobeu alguna relació entre les seves elasticitats?

Sí, estan relacionats: $E_x f(x_0)=\dfrac{1}{E_x g(f(x_0))}$

Demostració: Considerem $f^{-1}(x)=g(x)$ i demostrarem que $E_x f(x_0)\cdot E_x g(f(x_0))=1$

$$E_x f(x_0)\cdot E_x g(f(x_0))=f'(x_0)\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}\cdot g'(f(x_0))\cdot\frac{f(x_0)}{g(f(x_0))}=f'(x_0)\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}\cdot\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))\cdot\frac{f(x_0)}{f^{-1}(f(x_0))}=$$
$$f'(x_0)\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}\cdot\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))\cdot\frac{f(x_0)}{x_0}=f'(x_0)\cdot\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))\cdot f'(x_0)=\left(f^{-1}(f(x_0))\right)'=$$
$$=\left(x_0\right)'=1$$

Nota: Aquí x_0 representa qualsevol punt, és a dir, és una variable.

47. Resoleu els límits següents:

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\ln(1-x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{\ln(1-x) + x\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2e^{2x}}{\frac{-1}{1-x} + \ln(1-x) - \frac{x}{1-x}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$b) \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln(x) = (0'001)^2 \cdot \ln(0'001) = 0$$

$$c) \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \infty - \infty = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1} 1} = e^1 = e$$

$$e) \lim_{x\to +\infty} (1-e^{-x})^{e^x} = 1^{+\infty} = e^{\lim_{x\to +\infty}(1-e^{-x}-1)e^x} = e^{\lim_{x\to +\infty} -e^{-x}\cdot e^x} = e^{\lim_{x\to +\infty} -e^0} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f) \lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{e^x}{1} = e^2$$

48. Representeu gràficament les funcions següents:

$$a) \; f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Domini:

$Domf(x) = \mathbf{R} \setminus \{1,-1\}$

Punts de tall:

eix x $(0,0)$ eix y $(0,0)$

Simetries:

Hi ha simetria central

Asímptotes:

Vertical: a $x=-1$ i $x=1$

Horitzontal: No n'hi ha

Obliqua: delimitada per la recta $y=x$

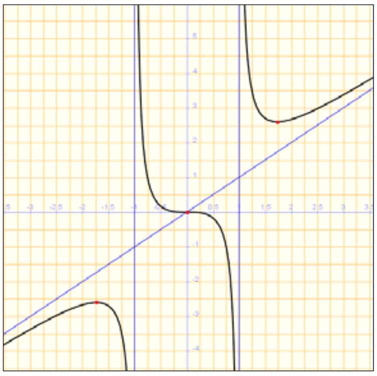
Monotonia:

$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$\nearrow$	màxim	$\searrow$	$\searrow$	p.i	$\searrow$	$\searrow$	mínim	$\nearrow$
Creixent		Decreixent	Decreixent		Decreixent	Decreixent		Creixent

Curvatura:

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$\cap$	$\cup$	Punt d'inflexió	$\cap$	$\cup$
Còncava	Convexa		Còncava	Convexa

Representació gràfica:



Imatge 52

b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$

Domini:

$Dom f(x) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

Simetries:

No hi ha simetries

Punts de tall:

eix x $(-2,0)$ i $(2,0)$ *eix y* $(0,4)$

Asímptotes:

Vertical: *a* $x=1$

Horitzontal: No n'hi ha

Obliqua: delimitada per la recta $y=x+1$

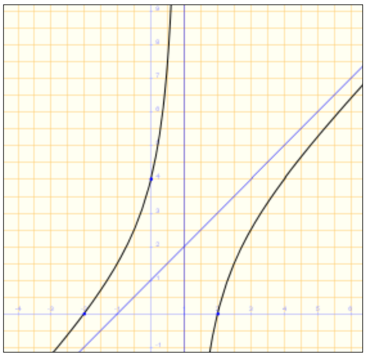
Monotonia:

$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
$\nearrow$	$\nearrow$
Creixent	Creixent

Curvatura:

$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
$\cup$	$\cap$
Convexa	Còncava

Representació gràfica:



Imatge 53

c) $f(x)=(x-1)e^{-x}$

Domini:

$Domf(x)=\mathbb{R}$

Simetries:

No hi ha simetries

Punts de tall:

eix x $(1,0)$ *eix y* $(0,-1)$

Asímptotes:

Vertical: No n'hi ha.

Horitzontal: No n'hi ha.

Obliqua: No n'hi ha.

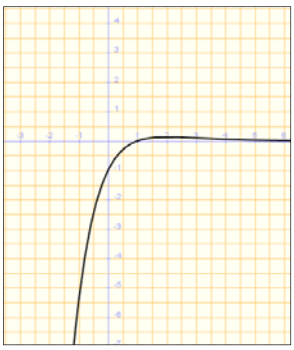
Monotonia:

$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
↗	màxim	↘
Creixent		Decreixent

Curvatura:

$(-\infty,3)$	3	$(3,+\infty)$
$\cap$	Punt d'inflexió	$\cup$
Còncava		Convexa

Representació gràfica:



Imatge 54

d) $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)^2}$

Domini:
$Dom f(x) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$

Simetries:
No hi ha simetries.

Punts de tall:
eix x $(-1,0)$ *i* $(1,0)$ *eix y* $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$

Asímptotes:
Vertical: a $x=2$
Horitzontal: a $f(x)=1$
Obliqua: No n'hi ha

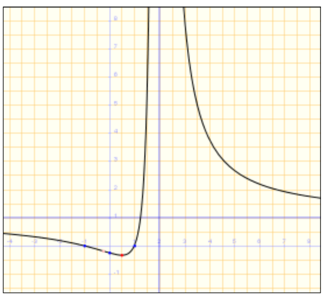
Monotonia:

$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},2\right)$	$(2,+\infty)$
↘	mínim	↗	↘
Decreixent		Creixent	Decreixent

Curvatura:

$\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$	$-\frac{1}{4}$	$\left(-\frac{1}{4},2\right)$	$(2,+\infty)$
$\cap$	Punt d'inflexió	$\cup$	$\cup$
Còncava		Convexa	Convexa

Representació gràfica:



Imatge 55

e) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

Domini:
$Dom f(x) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Simetries:
Hi ha simetria axial.

Punts de tall:
No hi ha talls amb els eixos

Asímptotes:
Vertical: No n'hi ha
Horitzontal: a $f(x)=0$
Obliqua: No n'hi ha

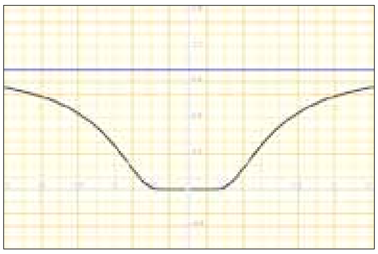
Monotonia:

$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
↘	↗
Decreixent	Creixent

Curvatura:

$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},0\right)$	$\left(0,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}},+\infty\right)$
$\cap$	Punt d'inflexió	$\cup$	$\cup$	Punt d'inflexió	$\cap$
Còncava		Convexa	Convexa		Còncava

Representació gràfica:



Imatge 56

f) $f(x)=x^2e^x$

Domini:
$Domf(x)=\mathbf{R}$

Simetries:
No hi ha simetries.

Punts de tall:
eix x (0,0)   *eix y* (0,0)

Asímptotes:
Vertical: No n'hi ha
Horitzontal: No n'hi ha.
Obliqua: No n'hi ha.

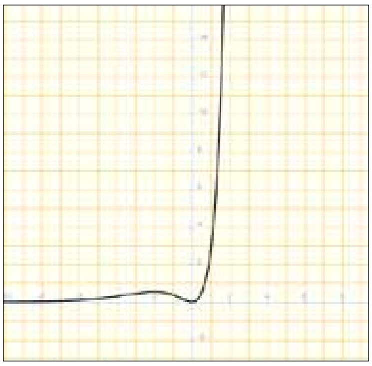
Monotonia:

$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
↗	Màxim	↘	mínim	↗
Creixent		Decreixent		Creixent

Curvatura:

$(-\infty,-2-\sqrt{2})$	$-2-\sqrt{2}$	$(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2})$	$-2+\sqrt{2}$	$(-2+\sqrt{2},+\infty)$
$\cup$	Punt d'inflexió	$\cap$	Punt d'inflexió	$\cup$
Convexa		Còncava		Convexa

Representació gràfica:



Imatge 57

g) $f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

Domini:

$Domf(x)=\mathbf{R}\backslash\{-1\}$

Punts de tall:

eix x (0,0) *eix y* (0,0)

Simetries:

No hi ha simetries.

Asímptotes:

Vertical: *a* $x=-1$

Horitzontal: No n'hi ha

Obliqua: Delimitada per la recta $y=x-2$

Monotonia:

$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
↗	màxim	↘	↗	p.i	↗
Creixent		Decreixent	Creixent		Creixent

Curvatura:

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$\cap$	$\cap$	Punt d'inflexió	$\cup$
Còncava	Còncava		Convexa

Representació gràfica:

Imatge 58

h) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$

Domini:

$Dom f(x) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

Simetries:

No hi ha simetries.

Punts de tall:

eix x No n'hi ha *eix y* $\left(\frac{1}{e},0\right)$

Asímptotes:

Vertical: No n'hi ha

Horitzontal: en $f(x)=e$

Obliqua: No n'hi ha.

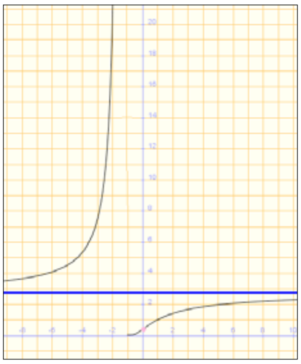
Monotonia:

$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$\nearrow$	$\nearrow$
Creixent	Creixent

Curvatura:

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$\cup$	$\cup$	Punt d'inflexió	$\cap$
Convexa	Convexa		Còncava

Representació gràfica:



Imatge 59

i) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Domini:
$Dom f(x)=\mathbf{R}\backslash\{-1,1\}$

Simetries:
Hi ha simetria axial.

Punts de tall:
eix x $(-1, 0)$ i $(1, 0)$ eix y $(0, -1)$

Asímptotes:
Vertical: a x=−1 i x=1
Horitzontal: a $f(x)$=1
Obliqua: No n'hi ha.

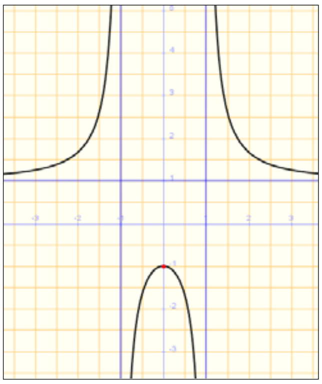
Monotonia:

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
↗	↗	màxim	↘	↘
Creixent	Creixent		Decreixent	Decreixent

Curvatura:

$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$\cup$	$\cap$	$\cup$
Convexa	Còncava	Convexa

Representació gràfica:



Imatge 60

j) $f(x)=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{(1+x^2)^2}$

Domini:

$Dom f(x)=\mathbf{R}$

Punts de tall:

eix x $(-1,0)$ i $(1,0)$ *eix y* $(0,2)$

Simetries:

Hi ha simetria axial.

Asímptotes:

Vertical: No n'hi ha.

Horitzontal: a $f(x)=0$.

Obliqua: No n'hi ha.

Monotonia:

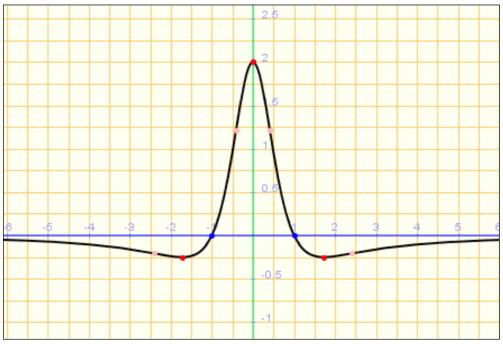
$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
↘	mínim	↗	màxim	↘	mínim	↗
Decreixent		Creixent		Decreixent		Creixent

Curvatura:

$(-\infty,a)$	a	(a,b)	b	(b,c)	c	(c,d)	d	$(d,+\infty)$
$\cap$	*p.i*	$\cup$	*p.i*	$\cap$	*p.i*	$\cup$	*p.i*	$\cap$
Còncava		*Convexa*		*Còncava*		*Convexa*		*Còncava*

On: $a=-\sqrt{2}-1$, $b=-\sqrt{2}+1$, $c=\sqrt{2}-1$ *i* $d=\sqrt{2}+1$

Representació gràfica:



Imatge 61

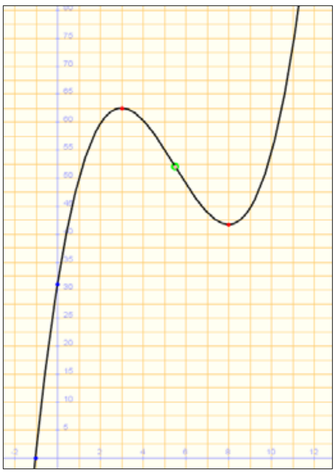
49. La relació que existeix entre el benefici obtingut (b) per la venda de cert article i el nivell de producció (q) d'aquest article és la següent:

$$b = 31 + 24q - 5'5q^2 + \frac{q^3}{3}$$

En aquest cas, b està expressat en unitats monetàries i q en unitats produïdes. Sabent que el nivell de producció ha de ser una quantitat positiva i no més gran que 10, trobeu el nivell de producció que fa que hi hagi un benefici màxim i quin és aquest benefici màxim. Gràcies a una millora tècnica, el nivell de producció q augmenta fins a 11 unitats; quin és el nivell de producció òptim i el benefici en aquest cas?

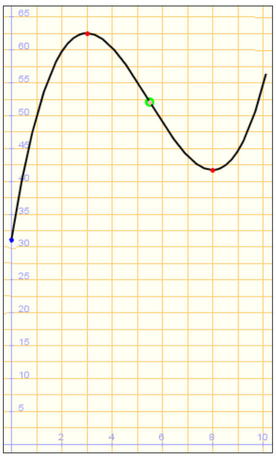
Observem les gràfiques següents:

Gràfica 1



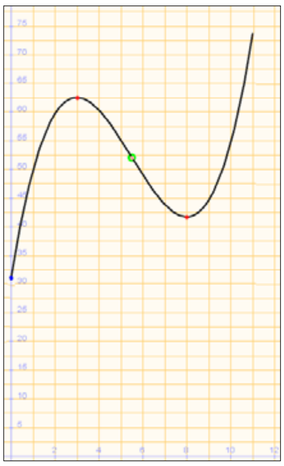
Imatge 62

Gràfica 2



Imatge 63

Gràfica 3



Imatge 64

Gràfica 1: Representa la funció $b(q)$
Gràfica 2: Representa la funció $b(q)$ al interval [0,10]
Gràfica 3: Representa la funció $b(q)$ al interval [0,11]

Sabem que (Gràfica 2):

$$\begin{cases} 0 < q < 10 \\ b(q) = 31 + 24q - 5'5q^2 + \dfrac{q^3}{3} \end{cases}$$

Volem trobar q de manera que b sigui el més gran possible, és a dir, busquem el màxim absolut de la funció b(q).

Aquest, segons el teorema de Weierstrass, sabrem que es troba a l'interval [0,10].

Busquem els punts crítics de la funció: sabem que es troben en els punts on la funció no és derivable (no és el cas), en els extrems de l'interval (és a dir, en x=0 i x=10) i en els punts on s'anul·la la derivada, busquem-los:

$$b'(q) = 24 - 11q + q^2 \quad \to \quad q^2 - 11q + 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 8 \;\; i \;\; x_2 = 3$$

Per tant, tenim quatre candidats a màxim absolut:

$$b(0) = 31 \quad , \quad b(3) = 62'5 \quad , \quad b(8) = 41'\widehat{6} \quad , \quad b(10) = 54'\widehat{3}$$

Per tant, el nivell de producció que maximitza el benefici és q=3 i el benefici és 62'5 unitats monetàries.

Què passa si 0<q<11 (gràfica 3)?

El procés de cerca del màxim absolut és anàleg a l'anterior però ara l'extrem q=10 és q=11.

Per tant, tenim quatre candidats a màxim absolut:

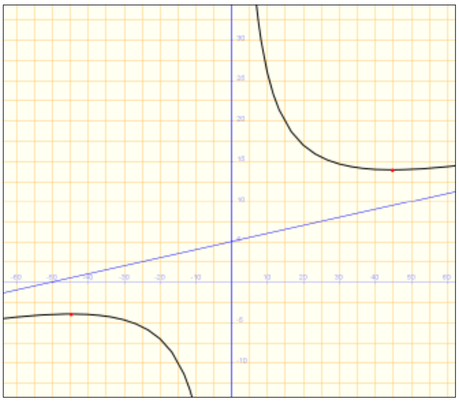
$$b(0) = 31 \quad , \quad b(3) = 62'5 \quad , \quad b(8) = 41'\widehat{6} \quad , \quad b(11) = 73'\widehat{6}$$

Per tant, el nivell de producció que maximitza el benefici és q=11i el benefici és $73'\widehat{6}$.

50. A l'empresa COSTOSA, la producció i la venda de x articles tenen associades la funció de costos $C(x) = 200 + 5x + 0'1x^2$ i la funció d'ingressos $R(x) = 8x$.

a) Trobeu el valor de x que minimitza el cost unitari $C_u(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

$$C_u(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{200 + 5x + 0'1x^2}{x} = \frac{200}{x} + 5 + 0'1x \longrightarrow \quad C_u(x) = \frac{200}{x} + 5 + 0'1x$$



Imatge 65

Si observem la funció, veurem que x no pot ser negativa; llavors sols considerem la branca de la dreta i veiem que x=0 no pertany al domini de la funció. A més, la funció és derivable en tots els punts del seu domini. Per tant, la recerca dels punts crítics es redueix a buscar els punts on s'anul·la la derivada.

Busquem el mínim d'aquesta funció:

$$C_u{}'(x) = -\frac{200}{x^2} + 0'1 \quad \rightarrow \quad -\frac{200}{x^2} + 0'1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2000}$$

Vegem si és un màxim, un mínim o un punt d'inflexió:

$$C_u{}''(x) = \frac{400}{x^3} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_u{}''(\sqrt{2000}) = \dfrac{400}{(\sqrt{2000})^3} > 0 & \rightarrow mínim \\ C_u{}''(-\sqrt{2000}) = \dfrac{400}{(-\sqrt{2000})^3} < 0 & \rightarrow màxim \end{cases}$$

Per tant, $x = \sqrt{2000} \approx 44'72 \approx 45$

b) Comproveu que el cost unitari mínim es troba quan el cost unitari és igual al cost marginal.

Hem de comprovar que imposant la següent igualtat, llavors obtenim la x de l'apartat anterior:

$$C_u(x) = CMg(x) \rightarrow \quad \frac{200}{x} + 5 + 0'1x = 5 + 0'2x \rightarrow \quad \frac{200}{x} + 0'1x = 0'2x \rightarrow$$

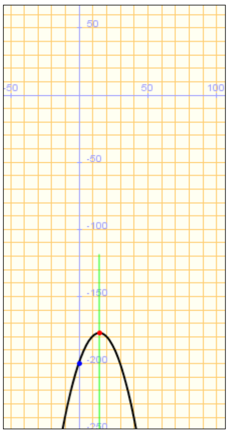
$\rightarrow \quad \frac{200}{x} = 0'1x \rightarrow \quad 200 = 0'1x^2 \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2000}$

Però, com que una quantitat d'articles mai no pot ser negativa, llavors,

$x = \sqrt{2000} \approx 44'72 \approx 45$

c) Calculeu el valor de x que maximitza la utilitat $P(x) = R(x) - C(x)$.

$$P(x) = R(x) - C(x) = 8x - 200 - 5x - 0'1x^2 = -0'1x^2 + 3x - 200$$



Imatge 66

Aquesta funció és derivable en tot el seu domini, i considerem la gràfica a partir de x=0.

En què P(0)=–200.

Busquem la x que maximitza $P(x)$:

$P'(x) = -0'2x + 3 \rightarrow -0'2x + 3 = 0 \rightarrow -0'2x + 3 = 0 \rightarrow x = 15$
$P''(x) = -0'2 \rightarrow P''(15) = -0'2 < 0$ *màxim*

d) Comproveu que la utilitat màxima es troba quan el cost marginal és igual a l'ingrés marginal.

Hem de comprovar que imposant la següent igualtat, llavors obtenim la x de l'apartat anterior:

$$CMg(x) = IMg(x) \rightarrow 5 + 0'2x = 8 \rightarrow x = 15$$

51. Un ramader compra una partida de bous per engreixar. Cada bou pesa 24 kg i costa 8,16 euros. Engreixar un bou li costa 0,24 euros al dia i engreixa 3 kg al dia. El preu del bou al mercat està disminuint de manera que al cap de *t* dies de la compra, aquest preu és de $2-\frac{t}{200}$ euros per kg. Quin és el guany si ven els bous al cap de 10 dies? I al cap de 15 dies? Quants dies li convé engreixar els bous abans de vendre'ls si vol obtenir el màxim guany per bou?

Dades:

- pes del bou abans d'engreixar=24 kg
- pes del bou després d'engreixar-lo t dies=24+3t kg
- cost del bou abans d'engreixar= 8,16 euros
- cost del bou després d'engreixar-lo t dies=8,16+0,24t euros
- preu del bou al mercat: $2-\frac{t}{200}$ euros per kg.

Nota: *t* representa el nombre de dies.

- Guany en la venta per cada bou al cap de 10 dies:

$$B(10) = I(10) - C(10) = 105'3 - 10'56 = 94'74\ euros$$

$$\begin{cases} I(t) = p \cdot q = \left(2-\frac{t}{200}\right)\cdot(24+3\mathrm{t}) \\ \mathrm{C(t)} = 8'16 + 0'24t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I(10) = \left(2-\frac{10}{200}\right)\cdot(24+3\cdot 10) = 105'3 \\ \mathrm{C}(10) = 8'16 + 0'24\cdot 10 = 10'56 \end{cases}$$

- Guany en la venta per cada bou al cap de 15 dies:

$$B(15) = I(15) - C(15) = 132'825 - 11'76 = 121'065 \approx 121'07\ euros$$

$$\begin{cases} I(t) = p \cdot q = \left(2-\frac{t}{200}\right)\cdot(24+3\mathrm{t}) \\ \mathrm{C(t)} = 8'16 + 0'24t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I(15) = \left(2-\frac{15}{200}\right)\cdot(24+3\cdot 15) = 132'825 \\ \mathrm{C}(15) = 8'16 + 0'24\cdot 15 = 11'76 \end{cases}$$

Hem de buscar el màxim de *B*(*t*):

$$B(t) = I(t) - C(t) = -\frac{3}{200}t^2 + \frac{147}{25}t + 48 - 8'16 - 0'24t = -0'015t^2 + 5'64t + 39'84$$

$$\begin{cases} I(t) = p \cdot q = \left(2-\frac{t}{200}\right)\cdot(24+3\mathrm{t}) = 48 + 6\mathrm{t} - \frac{3}{25}t - \frac{3}{200}t^2 = -\frac{3}{200}t^2 + \frac{147}{25}t + 48 \\ \mathrm{C(t)} = 8'16 + 0'24t \end{cases}$$

$$B'(t) = -0'03t + 5'64 \rightarrow -0'03t + 5'64 = 0 \rightarrow t = 188$$

$$B(188) = -0'015t^2 + 5'64t + 39'84 = 570\ euros$$

Si el ramader vol obtenir el màxim guany, haurà d'engreixar els bous durant 188 dies.

Nota: Per trobar la t que maximitza el benefici, podem imposar que els ingressos marginals siguin igual als costos marginals:

$$IMg(t) = CMg(t)$$

I s'obté el mateix resultat.

52. Un centre cultural realitza un concert al mes. Actualment, la mitjana d'assistència és de 3.000 aficionats, i el preu de venda és de 20 euros per entrada. Si els preus augmentessin o es rebaixessin en 1 euro, l'assistència mitjana es reduiria o augmentaria, respectivament, en 100 aficionats. Quins són els ingressos si el preu de venda és de 17 euros? I si fos de 22 euros?

Dades:

- Nombre d'aficionats actualment: 3000
- Nombre d'aficionats en variar el preu: 3000–100t
- Preu de venda per entrada actualment sense variar: 20
- Preu de venda al variar-ho: 20+t

Nota: La t representa una variació positiva o negativa.

- Ingressos si el preu de venda és de 17 euros:

$$p = 20 + t \quad \rightarrow \quad 17 = 20 + t \quad \rightarrow \quad t = -3$$

$$I(-3) = p \cdot q = 17 \cdot (3000 - 100 \cdot (-3)) = 56100 \text{ euros}$$

- Ingressos si el preu de venda és de 22 euros:

$$p = 20 + t \quad \rightarrow \quad 22 = 20 + t \quad \rightarrow \quad t = 2$$

$$I(2) = p \cdot q = 22 \cdot (3000 - 100 \cdot (2)) = 61600 \text{ euros}$$

a) Trobeu el preu de l'entrada que maximitzarà l'ingrés.

Hem de buscar el màxim de $I(t)$:

$$I(t) = p \cdot q = (20 + t) \cdot (3000 - 100t) = 60000 - 2000t + 3000t - 100t^2 = -100t^2 + 1000t + 60000$$
$$I'(t) = -200t + 1000 \rightarrow \quad -200t + 1000 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 5$$

Per tant, maximitzarà l'ingrés un augment de 5 euros, així el preu serà de 25 euros.

b) Cada espectador fa una despesa mitjana de 4 euros en productes que es venen durant el concert. Determineu el preu òptim de l'entrada amb aquesta informació.

Hem de buscar el màxim de *I(t)*:

$$I(t) = p \cdot q = (20 + t + 4) \cdot (3000 - 100t) = (24 + t) \cdot (3000 - 100t) =$$
$$= 72000 - 2400t + 3000t - 100t^2 = -100t^2 + 600t + 72000$$

$$I'(t) = -200t + 600 \rightarrow \quad -200t + 600 = 0 \rightarrow \quad t = 3$$

Per tant, maximitzarà l'ingrés un augment de 3euros, així el preu serà de 23 euros.

53. La gerent d'un restaurant ha observat que quan les amanides tenen un preu de 2,5 euros, se serveixen 200 amanides als clients. No obstant això, per cada euro d'augment al preu, es perden 100 clients. Anàlogament, per cada euro rebaixat al preu es guanyen 100 clients. Es suposa que qualsevol fracció d'euro d'augment (o de disminució) al preu provoca una pèrdua (guany) proporcional corresponent en el nombre de clients. D'altra banda, el servei d'amanides te uns costos fixos de 100 euros diaris més 0,30 euros per client. Determineu el preu de l'amanida que maximitza el guany diari.

Dades:

- Preu d'una amanida abans: 2,5 euros
- Preu d'una amanida al variar-ho: 2,5+t euros
- Amanides servides abans: 200
- Amanides servides al variar el preu: 200–100*t*

Nota: La *t* representa una variació positiva o negativa.

Hem de buscar el màxim de *B(t)*:

$$B(t) = I(t) - C(t) = -100t^2 - 50t + 500 + 30t - 160 = -100t^2 - 20t + 340$$
$$\begin{cases} I(t) = p \cdot q = (2'5 + t)(200 - 100\text{t}) = 500 - 250\text{t} + 200\text{t} - 100\text{t}^2 = -100\text{t}^2 - 50t + 500 \\ \text{C(t)} = 100 + 0'3 \cdot (200 - 100t) = 100 + 60 - 30t = -30t + 160 \end{cases}$$

$$B'(t) = -200t - 20 \rightarrow \quad -200t - 20 = 0 \rightarrow \quad t = -0'1$$

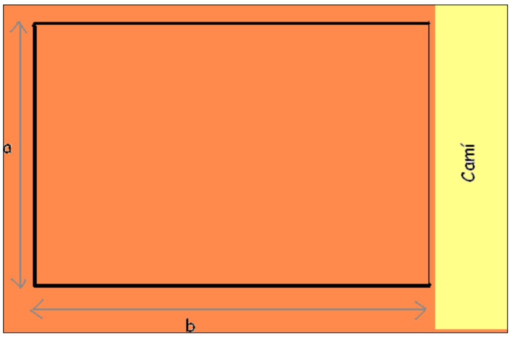
El preu que maximitzarà el benefici serà: 2,5–0,1=2,4 euros.

Nota: Per trobar la t que maximitza el benefici, podem imposar que els ingressos marginals siguin igual als costos marginals:

$$IMg(t) = CMg(t)$$

I s'obté el mateix resultat.

54. Un pagès vol tancar 60.000 metres quadrats de terreny rectangulars. Un dels costats d'aquest rectangle és a la vora d'un camí, la qual cosa fa que el cost del metre de tanca sigui d'1 euro per metre en aquest costat. Per a la resta de costats, el cost és de 0,5 euros per metre. Quants metres de cada tipus de tanca ha de comprar el pagès per fer mínimes les seves despeses?



Imatge 67

Perímetre=2*a*+2*b*
Àrea= base · altura

Sabem que l'àrea és 60.000 m^2. Per tant: *60000*= $b \cdot a$

Volem minimitzar la funció de costos, és a dir, el nombre de metres de tanca (el perímetre) pel preu respectiu: $C = 1 \cdot a + 0'5b + 0'5a + 0'5b$

Aquesta funció depèn de dues variables que estan relacionades, llavors:

$$\begin{cases} 60000 = b \cdot a \\ C = 1'5a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{60000}{b} \\ C = 1'5a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{60000}{b} \\ C = 1'5 \cdot \dfrac{60000}{b} + b = \dfrac{90000}{b} + b \end{cases}$$

Minimitzem C(*b*):

$$C'(b) = -\frac{90000}{b^2} + 1 \rightarrow -\frac{90000}{b^2} + 1 = 0 \rightarrow -90000 + b^2 = 0 \rightarrow b = \pm\sqrt{90000} = \pm 300$$

Com que els metres d'una tanca sempre és una magnitud positiva, prenem *b*=300.

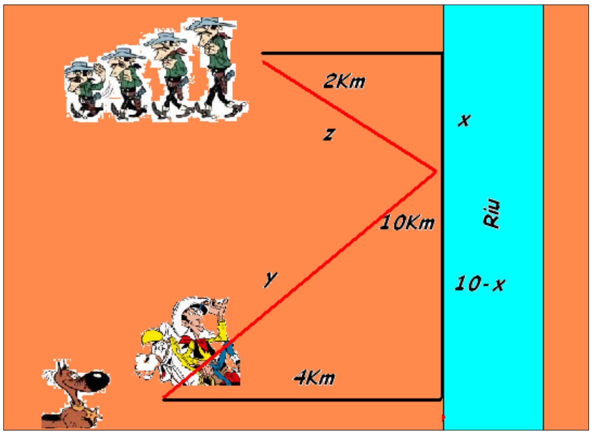
Comprovem que és un mínim de la funció C(*b*):

$$C''(b)=\frac{180000}{b^3}\quad\rightarrow\quad C''(300)=\frac{180000}{300^3}=0'00\hat{6}>0$$

Per tant, és un mínim de C(*b*). I a més $a=\frac{60000}{b}=200$

Així, doncs, el pagès haurà de comprar 300+200+300=800 metres de tanca de 0,5 euros per metre i 200 metres de tanca d'1 euro per metre.

55. El campament dels germans Dalton es troba a dos quilòmetres del marge d'un riu recte. Lucky Luke es troba al mateix costat del riu, però a 10 quilòmetres riu avall d'aquest campament, i a 4 quilòmetres del marge. Si Lucky Luke vol abeurar el seu cavall, Jolly Jumper, abans d'anar al campament a detenir els Dalton, quin camí o camins haurà de seguir per recórrer una distància mínima?



Imatge 68

El camí més curt és l'assenyalat amb roig (o vermell).

Per tant, la distància mínima serà: $D=y+z$

Vegem què són *y* i *z*:

$$\begin{cases} y=\sqrt{4^2+(10-x)^2}=\sqrt{x^2-20x+116} \\ z=\sqrt{2^2+x^2}=\sqrt{4+x^2} \end{cases} \rightarrow D(x)=y+z=\sqrt{x^2-20x+116}+\sqrt{4+x^2}$$

Busquem el mínim d'aquesta funció:

$$D'(x)=\frac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+116}}+\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\quad\rightarrow\quad\frac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+116}}+\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}=0$$

$$\frac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+116}}=-\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\quad\rightarrow\quad\left(\frac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+116}}\right)^2=\left(-\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right)^2$$

$$\frac{(x-10)^2}{x^2-20x+116}=\frac{x^2}{4+x^2} \rightarrow \frac{x^2-20x+100}{x^2-20x+116}=\frac{x^2}{4+x^2}$$

$$(x^2-20x+100)(4+x^2)=(x^2-20x+116)\cdot x^2 \rightarrow$$

$$4x^2+x^4-80x-20x^3+400+100x^2=x^4-20x^3+116x^2 \rightarrow$$

$$12x^2+80x-400=0 \rightarrow x_1=\frac{10}{3}=3'\widehat{3} \quad i \quad x_2=-10$$

Una distància no pot ser negativa; per tant, comprovem que $x_1=\frac{10}{3}=3'\widehat{3}$ és el mínim:

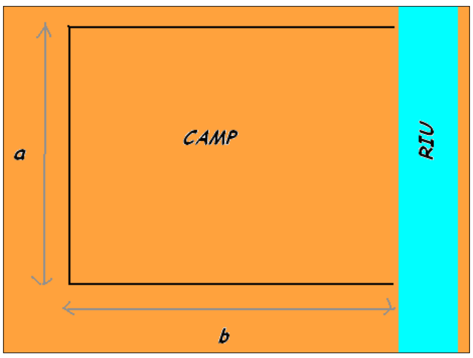
$$D'(0)=\frac{0-10}{\sqrt{0^2-20\cdot 0+116}}+\frac{0}{\sqrt{4+0^2}}<0 \quad , \quad D'(4)=\frac{4-10}{\sqrt{4^2-20\cdot 4+116}}+\frac{4}{\sqrt{4+4^2}}>0$$

Com que la gràfica decreix per l'esquerra del punt i creix per la dreta del punt, tenim que $x_1=\frac{10}{3}=3'\widehat{3}$ és un mínim.

Així, la distància mínima serà:

$$D\left(\frac{10}{3}\right)=y+z=\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2-20\frac{10}{3}+116}+\sqrt{4+\left(\frac{10}{3}\right)^2}=2\cdot\sqrt{34}\approx 11'66 \ km.$$

56. Un ramader vol construir una tanca rectangular a la vora d'un riu recte. Només té 1.000 metres de filferro i no cal tanca pel costat del riu. Quina és l'àrea màxima que es pot envoltar amb la tanca de filferro?



Imatge 69

Perímetre=a+2b
Àrea= base · altura

Sabem que disposem d'un perímetre de 1.000 metres. Per tant: $1000=a+2b$

Volem maximitzar la funció àrea $A=b\cdot a$ però veiem que depèn de dues variables a i b. Però aquestes estan relacionades amb la condició anterior. Per tant, aïllem una variable i la substituïm a la funció àrea:

$$\begin{cases}1000 = a + 2b \\ A = a \cdot b\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a = 1000 - 2b \\ A = a \cdot b\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a = 1000 - 2b \\ A = (1000 - 2b)\cdot b = 1000b - 2b^2\end{cases}$$

Per tant, ara ja tenim la funció àrea expressada respecte una variable, la b:
Maximitzem la funció $A(b) = 1000b - 2b^2$:

$$A'(b) = 1000 - 4b \;\rightarrow\; 1000 - 4b = 0 \;\rightarrow\; b = 250$$

Comprovem que és un mínim de la funció $A(b)$:

$$A''(b) = -4 \;\rightarrow\; A''(250) = -4 < 0$$

Per tant, les dimensions del rectangle que maximitzaran l'àrea d'aquest camp seran: 500 x 250 metres. I el valor de l'àrea màxim serà de $A = 250 \cdot 500 = 125000 \;\; m^2$.

57. Segons un estudi sobre l'evolució de la població d'una espècie protegida determinada, podem establir el nombre d'individus d'aquesta espècie durant els propers anys mitjançant la funció

$$f(t) = \frac{50t + 500}{t+1}$$

en què t és el nombre d'anys transcorreguts.

a) Calculeu la població actual i la prevista per a d'aquí a nou anys.

La població actual representa l'instant de temps $t=0$, ja que encara no han començat a passar els anys, així d'aquí a 9 anys $t=9$.

$$f(0) = \frac{50\cdot 0 + 500}{0+1} = 500 \text{ individus}, \;\; f(9) = \frac{50\cdot 9 + 500}{9+1} = 95 \text{ individus}$$

b) Determineu els períodes en què la població augmentarà i els períodes en què disminuirà.

És a dir, ens demanen els intervals de creixement i decreixement de la funció. Tinguem en compte que $t=-1$ no pertany al domini però això no ens afectarà pas, ja que no existeixen nombre d'anys negatius. Així, podríem afirmar que el domini d'aquesta funció respecte al context que ens trobem és $[0, +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{50(t+1) - (50t+500)\cdot 1}{(t+1)^2} = \frac{50t + 50 - 50t - 500}{(t+1)^2} = \frac{-450}{(t+1)^2}$$

$\dfrac{-450}{(t+1)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad -450 \neq 0$ Per tant, no tenim punts singulars.

Llavors:

$[0,+\infty)$
$\searrow$
decreixent

c) Esbrineu si, segons aquesta previsió, la població tendirà a estabilitzar-se en algun valor i, si escau, determineu-lo.

És a dir, volem saber la tendència en el més infinit. Per tant, el límit d'aquesta funció quan x tendeix a més infinit.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{50t + 500}{t+1} = 50$$

Per tant, la població tendirà a estabilitzar-se en 50 individus.

Exercicis del Tema 5: Integració

58. Calculeu les integrals immediates següents:

a) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + k$

b)

$$\int \left(4x^2 + x^{-3} + \frac{1}{2x}\right)dx = \int 4x^2 dx + \int x^{-3} dx + \int \frac{1}{2x} dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{x^{-2}}{2} + \frac{1}{2}\ln|x| + k = \frac{4x^3}{3} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln|x| + k$$

c) $\int x \cdot \sqrt{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{1+\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + k = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + k$

d) $\int \frac{1}{2x-3} dx = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + k$

e) $\int \frac{x^2}{1-2x^3} dx = -\frac{1}{6}\ln\left|1-2x^3\right| + k$

f) $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + k$

59. Calculeu les integrals immediates següents:

a)

$$\int (x^2+7)^2\, dx = \int x^4 + 14x^2 + 49 dx = \int x^4 dx + \int 14x^2 dx + \int 49 dx = \frac{x^5}{5} + 14\frac{x^2}{2} + 49x + k =$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{14x^3}{3} + 49x + k$$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \underset{(1)}{=} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = 2t^{\frac{1}{2}} + k = 2\sqrt{t} + k \underset{(2)}{=} 2\sqrt{x+1} + k$

(1) Utilitzem el canvi de variable:

$$\begin{cases} t = x+1 \\ dt = dx \end{cases}$$

(2) Desfem el canvi de variable.

c)

$$\int (3x + 2\sqrt[4]{x})dx = \int 3x dx + \int 2\sqrt[4]{x} dx = 3\int x dx + 2\int x^{\frac{1}{4}} dx = 3\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + k = \frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{4}} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}dx \underset{(1)}{=} \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + k \underset{(2)}{=} \ln|x+3| + k$

(1) Utilitzem el canvi de variable:

$$\begin{cases} t = x+3 \\ dt = dx \end{cases}$$

(2) Desfem el canvi de variable.

e) $\displaystyle\int \frac{1}{-7x+11}dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{-7} = -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{7}\ln|t| + k = -\frac{1}{7}\ln|-7x+11| + k$

(1) Utilitzem el canvi de variable:

$$\begin{cases} t = -7x+11 \\ dt = -7dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -7x+11 \\ \dfrac{dt}{-7} = dx \end{cases}$$

(2) Desfem el canvi de variable.

f) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx \underset{(1)}{=} \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} + k \underset{(2)}{=} \frac{(\ln x)^2}{2} + k$

(1) Utilitzem el canvi de variable:

$$\begin{cases} t = \ln x \\ dt = \dfrac{1}{x}dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{cases}$$

(2) Desfem el canvi de variable.

g) $\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx \underset{(1)}{=} \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + k = -\frac{1}{t} + k \underset{(2)}{=} -\frac{1}{\ln x} + k$

(1) Utilitzem el canvi de variable:

$$\begin{cases} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{cases}$$

(2) Desfem el canvi de variable.

h) $\int e^{3x} dx \underset{(1)}{=} \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + k = \frac{1}{3} e^{3x} + k$

(1) Utilitzem el canvi de variable:

$$\begin{cases} t = 3x \\ dt = 3dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 3x \\ \frac{dt}{3} = dx \end{cases}$$

(2) Desfem el canvi de variable.

i) $\int \frac{e^x}{5 + e^x} dx \underset{(1)}{=} \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + k \underset{(2)}{=} \ln|5 + e^x| + k$

(1) Utilitzem el canvi de variable:

$$\begin{cases} t = 5 + e^x \\ dt = e^x dx \end{cases}$$

(2) Desfem el canvi de variable.

j) $\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + k = -\frac{1}{3x^3} + k$

k) $\int \frac{1}{(x-1)^2} dx \underset{(1)}{=} \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + k = -\frac{1}{t} + k \underset{(2)}{=} -\frac{1}{x-1} + k$

(1) Utilitzem el canvi de variable:

$$\begin{cases} t = x - 1 \\ dt = dx \end{cases}$$

(2) Desfem el canvi de variable.

l) $\displaystyle\int \frac{-2}{(1-x)^3}\,dx \underset{(1)}{=} \int \frac{2dt}{t^3} = 2\int t^{-3}dt = 2\cdot\frac{t^{-2}}{-2} + k = -\frac{1}{t^2} + k = -\frac{1}{(1-x)^2} + k$

(1) Utilitzem el canvi de variable:

$$\begin{cases} t = 1 - x \\ dt = -dx \end{cases}$$

(2) Desfem el canvi de variable.

60. Calculeu les integrals per parts següents:

a)

$$\int x^2 \ln(x)dx \underset{(1)}{=} \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + k = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(x) - \frac{x^3}{9} + k$$

(1) Prenem:

$$\begin{cases} u = \ln(x) & du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x^2\,dx & v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

b) $\displaystyle\int xe^x dx \underset{(1)}{=} xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + k = e^x(x-1) + k$

(1) Prenem:

$$\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = e^x\,dx & v = e^x \end{cases}$$

c)

$$\int x^3 e^{2x} dx \underset{(1)}{=} x^3\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int 3x^2\frac{e^{2x}}{2}dx = x^3\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}dx \underset{(2)}{=} x^3\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\left[x^2\frac{e^{2x}}{2} - \int 2x\frac{e^{2x}}{2}dx\right] =$$

$$= x^3\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\frac{3}{2}\left[x^2\frac{e^{2x}}{2}-\int xe^{2x}dx\right]\underset{(3)}{=} x^3\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\frac{3}{2}\left[x^2\frac{e^{2x}}{2}-\left(x\frac{e^{2x}}{2}-\int\frac{e^{2x}}{2}dx\right)\right]=$$

$$= x^3\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\frac{3}{2}\left[x^2\frac{e^{2x}}{2}-\left(x\frac{e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}\right)\right]+k = x^3\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\frac{3}{2}\left[x^2\frac{e^{2x}}{2}-\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{e^{2x}}{4}\right]+k=$$

$$= x^3\cdot\frac{e^{2x}}{2}+\left[-\frac{3x^2e^{2x}}{4}+\frac{3xe^{2x}}{4}-\frac{3e^{2x}}{8}\right]+k=\frac{x^3e^{2x}}{2}-\frac{3x^2e^{2x}}{4}+\frac{3xe^{2x}}{4}-\frac{3e^{2x}}{8}+k=$$

$$= e^{2x}\left(\frac{x^3}{2}-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{4}-\frac{3}{8}\right)+k$$

(1) Prenem:

$$\begin{cases} u = x^3 & du = 3x^2dx \\ dv = e^{2x}\quad dx & v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

(2) Prenem:

$$\begin{cases} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{2x}\quad dx & v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

(3) Prenem:

$$\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x}\quad dx & v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

d)

$$\int\frac{\ln(x)}{x^2}dx=\int\frac{1}{x^2}\cdot\ln(x)\quad dx\underset{(1)}{=}-\frac{1}{x}\cdot\ln(x)-\int-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln(x)}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}+k=$$

$$=\frac{-\ln(x)-1}{x}+k$$

(1) Prenem:

$$\begin{cases} u = \ln(x) & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = \dfrac{1}{x^2}\quad dx & v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

e)

$$\int x\cdot\ln(x)\quad dx \underset{(1)}{=} \ln(x)\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x}{2}dx=\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int x\quad dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}+k=$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)+k$$

(1) Prenem:

$$\begin{cases} u=\ln(x) & du=\frac{1}{x}\quad dx \\ dv=x\quad dx & v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

f)

$$\int\ln(x)dx=\int\ln(x)\cdot 1\quad dx \underset{(1)}{=} x\cdot\ln(x)-\int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\cdot\ln(x)-\int 1\quad dx = x\cdot\ln(x)-x+k = x\cdot(\ln(x)-1)+k$$

(1) Prenem:

$$\begin{cases} u=\ln(x) & du=\frac{1}{x}\quad dx \\ dv=1\quad dx & v=x \end{cases}$$

g)

$$\int x^2e^x\quad dx \underset{(1)}{=} x^2\cdot e^x-\int e^x 2x\quad dx = x^2\cdot e^x-2\int e^x x\quad dx \underset{(2)}{=} x^2\cdot e^x-2\left(x\cdot e^x-\int e^x dx\right)=$$

$$=x^2\cdot e^x-2\left(x\cdot e^x-e^x\right)+k=x^2\cdot e^x-2x\cdot e^x+2e^x+k=e^x\left(x^2-2x+2\right)+k$$

(1) Prenem:

$$\begin{cases} u=x^2 & du=2x\quad dx \\ dv=e^x\quad dx & v=e^x \end{cases}$$

(2) Prenem: (quan fem un altre canvi de variable intentem que sigui semblant a l'anterior)

$$\begin{cases} u=x & du=dx \\ dv=e^x\quad dx & v=e^x \end{cases}$$

h)

$$\int (x-1)^2 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}\cdot(x^2-2x+1) - \int \frac{e^{2x}}{2}(2x-2)dx \underset{(2)}{=} \frac{e^{2x}}{2}\cdot(x^2-2x+1) - \left[\int e^{2x} x dx - \int e^{2x} dx\right] =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\cdot(x^2-2x+1) - \left[\int e^{2x} x dx - \frac{e^{2x}}{2}\right] \underset{(3)}{=} \frac{e^{2x}}{2}\cdot(x^2-2x+1) - \left[\frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\ dx - \frac{e^{2x}}{2}\right] =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\cdot(x^2-2x+1) - \left[\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{2x}}{2}\right] + k = \frac{e^{2x}}{2}\cdot(x^2-2x+1) - \frac{e^{2x}}{2}\left[x - \frac{1}{2} - 1\right] + k =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\cdot(x^2-2x+1) + \frac{e^{2x}}{2}\left(-x+\frac{3}{2}\right) + k = \frac{e^{2x}}{2}\cdot\left(x^2 - 3x + \frac{5}{2}\right) + k = e^{2x}\cdot\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right) + k$$

(1) Prenem: Tenint en compte que $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$$\begin{cases} u = x^2 - 2x + 1 & du = 2x - 2\ \ dx \\ dv = e^{2x}\ \ dx & v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

(2) Utilitzem les propietats:

$$\int \frac{e^{2x}}{2}(2x-2)dx = \int\left(\frac{e^{2x}}{2}\cdot 2x - \frac{e^{2x}}{2}\cdot 2\right)dx = \int (e^{2x}x - e^{2x})dx = \int e^{2x}x\ \ dx - \int e^{2x}\ \ dx$$

(3) Prenem:

$$\begin{cases} u = x & du = \ dx \\ dv = e^{2x}\ \ dx & v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

i)

$$\int x\sqrt{x+1}\ dx \underset{(1)}{=} x\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\ dx \underset{(2)}{=} \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + k =$$

$$= \frac{2}{3}x(x+1)(x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^2(x+1)^{\frac{1}{2}} + k = \frac{2}{15}(3x^2 + x - 2)\sqrt{x+1} + k$$

(1) Prenem:

$$\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = \sqrt{x+1}\ \ dx & v = \dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

(2) Mitjançant el canvi de variable $t=(x+1)$:

$$\int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{3}\int t^{\frac{3}{2}}dt = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + k = \frac{4}{15}t^{\frac{5}{2}} + k = \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + k$$

61. Comproveu que $\int \frac{f'(x)}{a^2 - f^2(x)}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+f(x)}{a-f(x)}\right| + k.$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 - f^2(x)}dx \underset{(1)}{=} \int \frac{dt}{a^2 - t^2} \underset{(2)}{=} \int \frac{\frac{1}{2a}}{(a-t)}\, dx + \int \frac{\frac{1}{2a}}{(a+t)}\, dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{(a-t)}\, dx + \int \frac{1}{(a+t)}\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(-\ln|a-t| + \ln|a+t|\right) + k = \frac{1}{2a}\left(\ln\left(\frac{|a+t|}{|a-t|}\right)\right) + k = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+t}{a-t}\right| + k \underset{(3)}{=} \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+f(x)}{a-f(x)}\right| + k$$

(1) Utilitzem el canvi de variable:

$$\begin{cases} t = f(x) \\ dt = f'(x)dx \end{cases}$$

(2) Mètode dels coeficients indeterminats.

Volem trobar A i B de manera que puguem separar la integral com a suma d'integrals més senzilles. Observem que $(a^2 - t^2) = (a-t)(a+t)$

$$\frac{1}{a^2 - t^2} = \frac{A}{(a-t)} + \frac{B}{(a+t)} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a^2 - t^2} = \frac{A(a+t)}{(a-t)(a+t)} + \frac{B(a-t)}{(a+t)(a-t)}$$

Llavors: $1 = A(a+t) + B(a-t)$

$$\begin{cases} si \quad t = a & 1 = 2aA \\ si \quad t = -a & 1 = 2aB \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2a} \\ B = \frac{1}{2a} \end{cases}$$

(3) Desfem el canvi de variable

62. Calculeu les integrals definides següents:

$$a) \int_0^1 (e^{3x} + 1)dx = \left[\frac{e^{3x}}{3} + x\right]_0^1 = \left(\frac{e^{3\cdot 1}}{3} + 1\right) - \left(\frac{e^{3\cdot 0}}{3} + 0\right) = \frac{e^3}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{e^3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{e^3 + 2}{3}$$

b) $\int_1^2 (\ln(x))^2\,dx = \left[x\left((\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 2\right) + k\right]_1^2 =$

$= \left(2\left((\ln(2))^2 - 2\ln(2) + 2\right)\right) - \left(1\left((\ln(1))^2 - 2\ln(1) + 2\right)\right) = \left(2\left((\ln(2))^2 - 2\ln(2) + 2\right)\right) - 2 =$
$= 2(\ln(2))^2 - 4\ln(2) + 2$

Calculem la integral indefinida:

$$\int (\ln(x))^2\,dx \underset{(1)}{=} \int t^2 \cdot e^t\,dt \underset{(2)}{=} e^t\left(t^2 - 2t + 2\right) + k \underset{(3)}{=} e^{\ln(x)}\left((\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 2\right) + k =$$
$$= x\left((\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 2\right) + k$$

(1) Utilitzem el canvi de variable

$$\begin{cases} t = \ln(x) \\ dt = \dfrac{1}{x}dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \ln(x) \\ x \cdot dt = dx \end{cases} \quad \left(e^t = x\right) \rightarrow \begin{cases} t = \ln(x) \\ e^t \cdot dt = dx \end{cases}$$

(2) Calculada a l'exercici 60*g*).

(3) Desfem el canvi de variable.

c) $\int_0^1 xe^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)\right]_0^1 = \frac{e^{2\cdot 1}}{4}(2\cdot 1 - 1) - \frac{e^{2\cdot 0}}{4}(2\cdot 0 - 1) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$

Calculem la integral indefinida:

$$\int xe^{2x}\,dx \underset{(1)}{=} \int \frac{t}{2}e^t\,\frac{dt}{2} = \int \frac{t \cdot e^t}{4}\,dt = \frac{1}{4}\int t \cdot e^t\,dt \underset{(2)}{=} \frac{1}{4}e^t(t-1) + k \underset{(3)}{=} \frac{e^{2x}}{4}(2x-1) + k$$

(1) Utilitzem el canvi de variable

$$\begin{cases} t = 2x \\ dt = 2dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 2x \\ \dfrac{dt}{2} = dx \end{cases} \quad \left(x = \frac{t}{2}\right)$$

(2) Utilitzem l'exercici 60 *b*)
(3) Desfem el canvi de variable.

d)

$$\int_1^2 (x+1)\ln(x)dx = \int_1^2 x\ln(x)+\ln(x)\ \ dx \underset{(1)}{=} \int_1^2 x\ln(x)\ \ dx + \int_1^2 \ln(x)\ \ dx \underset{(2)}{=} \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)\right]_1^2 + \left[x\cdot\left(\ln(x)-1\right)\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2^2}{2}\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right) - \frac{1^2}{2}\left(\ln(1)-\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\left(\ln(2)-1\right) - 1\cdot\left(\ln(1)-1\right) = 2\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + 2\left(\ln(2)-1\right) + 1 =$$

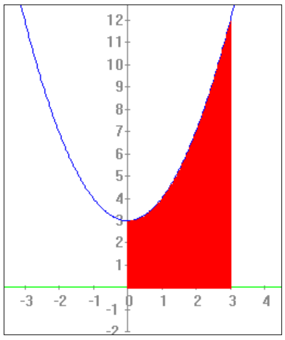
$$= 2\ln(2) - 1 + \frac{1}{4} + 2\ln(2) - 2 + 1 = 4\ln(2) - \frac{7}{4}$$

(1) Utilitzem les propietats.

(2) Utilitzem l'exercici 60 *e)* i 60 *f)*

63. Calculeu l'àrea dels recintes tancats per les corbes següents:

a) $y = x^2 + 3$, $x = 3$ i els semieixos positius de coordenades.

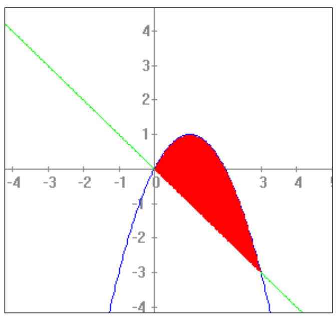


Imatge 70

Calculem l'àrea:

$$Àrea = \int_0^3 x^2 + 3\ \ dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x\right]_0^3 = \left(\frac{3^3}{3} + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 3\cdot 0\right) = 18$$

b) $y = 2x - x^2$, $y = -x$



Imatge 71

Considerem: $f(x) = 2x - x^2$ i $g(x) = -x$

- Calculem *f(x)–g(x)*.

$$f(x)-g(x)=2x-x^2-(-x)=-x^2+3x$$

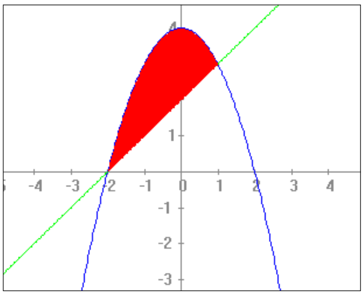
- Busquem els punts en què es tallen aquestes funcions, és a dir, en què *f(x)–g(x)*=0.

$$-x^2+3x=0 \quad \rightarrow \quad x_1=0 \ \text{ i } \ x_2=3$$

- Calculem l'àrea d'aquesta funció amb extrems els punts de tall.

$$\int_0^3 -x^2+3x \quad dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3=\left(-\frac{3^3}{3}+\frac{3\cdot 3^2}{2}\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+\frac{3\cdot 0^2}{2}\right)=-\frac{27}{3}+\frac{27}{2}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}=4'5$$

c) $y=4-x^2,\ x-y+2=0 \quad (y=x+2)$



Imatge 72

Considerem: $f(x)=4-x^2$ i $g(x)=x+2$

- Calculem *f(x)–g(x)*.

$$f(x)-g(x)=4-x^2-(x+2)=-x^2-x+2$$

- Busquem els punts en què es tallen aquestes funcions, és a dir, en què *f(x)–g(x)*=0.

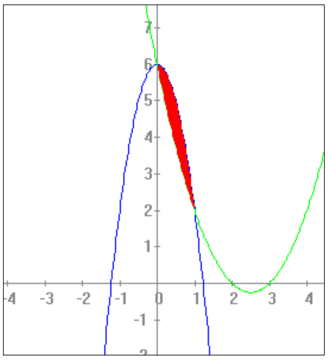
$$-x^2-x+2=0 \quad \rightarrow \quad x_1=1 \ \text{ i } \ x_2=-2$$

- Calculem l'àrea d'aquesta funció amb extrems els punts de tall.

$$\int_{-2}^{1} -x^2-x+2 \quad dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\left(-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}+2(-2)\right)=$$

$$=\frac{7}{6}+\frac{20}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}=4'5$$

d) $y = 6 - 4x^2$, $y = x^2 - 5x + 6$



Imatge 73

Considerem: $f(x) = 6 - 4x^2$ i $g(x) = x^2 - 5x + 6$

- Calculem *f(x)–g(x)*.

$$f(x) - g(x) = 6 - 4x^2 - (x^2 - 5x + 6) = -5x^2 + 5x$$

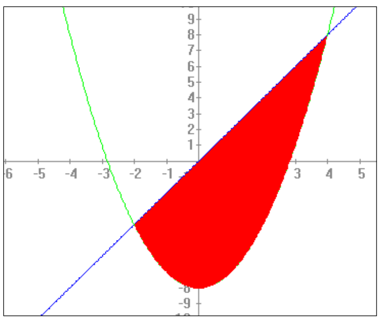
- Busquem els punts en què es tallen aquestes funcions, és a dir, en què *f(x)–g(x)*=0.

$$-5x^2 + 5x = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \ \text{ i } \ x_2 = 1$$

Calculem l'àrea d'aquesta funció amb extrems els punts de tall.

$$\int_0^1 -5x^2 + 5x \quad dx = \left[-\frac{5x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right]_0^1 = \left(-\frac{5 \cdot 1^3}{3} + \frac{5 \cdot 1^2}{2} \right) - \left(-\frac{5 \cdot 0^3}{3} + \frac{5 \cdot 0^2}{2} \right) = \frac{5}{6} = 0'8\widehat{3}$$

e) $y = 2x$, $y = x^2 - 8$



Imatge 74

Considerem: $f(x) = 2x$ i $g(x) = x^2 - 8$

- Calculem *f(x)–g(x)*.

$$f(x) - g(x) = 2x - (x^2 - 8) = -x^2 + 2x + 8$$

- Busquem els punts en què es tallen aquestes funcions, és a dir, en què $f(x)-g(x)=0$.

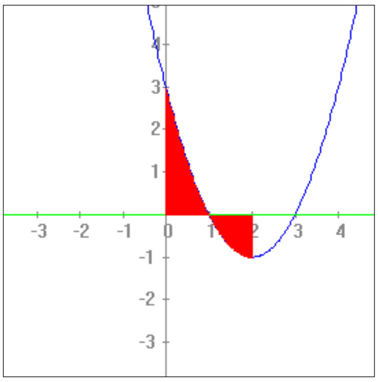
$$-x^2+2x+8=0 \quad \to \quad x_1=-2 \ \text{ i } \ x_2=4$$

- Calculem l'àrea d'aquesta funció amb extrems els punts de tall.

$$\int_{-2}^{4} -x^2+2x+8 \ \ dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right]_{-2}^{4} = \left(-\frac{4^3}{3}+4^2+8\cdot 4\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2+8\cdot(-2)\right)=$$
$$=\frac{80}{3}+\frac{28}{3}=-\frac{108}{3}=36$$

Però una àrea no pot ser mai negativa; per tant, prendrem el valor absolut. Llavors l'àrea és 4.

f) $y=x^2-4x+3$, l'eix d'abscisses i les rectes $x=0$, $x=2$.



Imatge 75

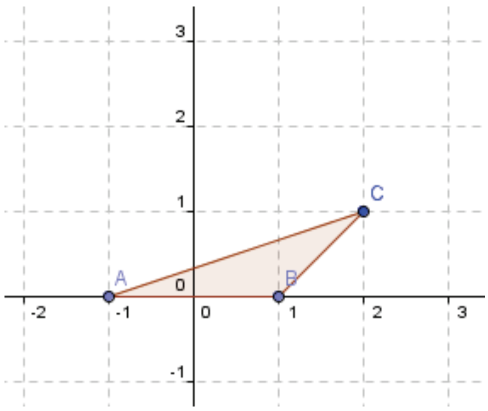
Busquem els punts de tall amb l'eix de les x:

$$x^2-4x+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=1 \ \text{ i } \ x_2=3$$

Així, si volem integrar la integral següent, l'haurem de partir amb dos trossos:

$$\int_0^2 x^2-4x+3 \ \ dx = \int_0^1 x^2-4x+3 \ \ dx + \int_1^2 x^2-4x+3 \ \ dx = \left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^2 =$$
$$=\left[\left(\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2+3\cdot 1\right)-\left(\frac{0^3}{3}-2\cdot 0^2+3\cdot 0\right)\right]+\left[\left(\frac{2^3}{3}-2\cdot 2^2+3\cdot 2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2+3\cdot 1\right)\right]=\frac{4}{3}+\left|\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\right|=\frac{6}{3}=2$$

64. Utilitzeu el càlcul integral per determinar l'àrea del triangle de vèrtexs $(-1,0),(1,0)$ i $(2,1)$.



Imatge 76

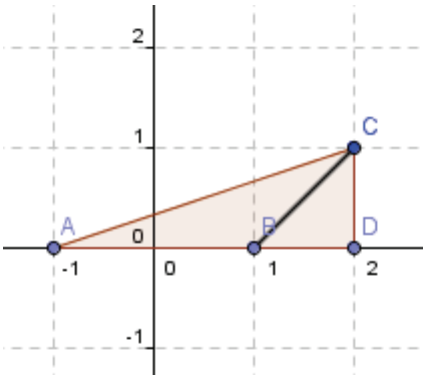
Recta AC:

$$y = \frac{x+1}{3}$$

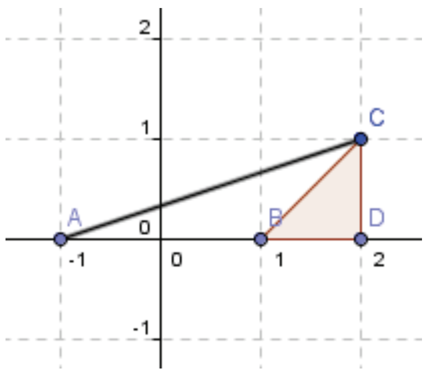
Recta BC:

$y=x-1$

Per calcular l'àrea del triangle anterior, considerarem l'àrea dels següents triangles:



Imatge 77



Imatge 78

O sigui, l'àrea del triangle que cerquem serà la resta d'aquestes dues anteriors.

Àrea(Imatge7) = Àrea(Imatge8) - Àrea(Imatge9)

$$\int_{-1}^{2} \frac{x+1}{3}\, dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} x+1\, dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}u^2 \qquad \int_{1}^{2} x-1\, dx = \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{1}^{2} = \frac{1}{2}u^2$$

Per tant l'àrea del triangle serà: $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1\,u^2$.

65. Una empresa sap que la seva funció de costos marginals és la següent: $CM_z(q) = 3q^2 - 6q + 10$ .Sabent que els costos fixos són 100.000 u.m. i que la funció de demanda de l'empresa és $p = 8122 - 3q$, determineu la funció de costos totals. Trobeu el nivell de producció i el preu que maximitzen el benefici.

- Busquem la funció de costos totals *C(q)*:

$$C(q) = \int CM_z(q) \quad dq = \int 3q^2 - 6q + 10 \quad dq = q^3 - 3q^2 + 10q + k$$

Com que els costos fixos són 100.000, quan q=0 llavors $C(0) = 100000$ Per tant:

$$\begin{cases} C(0) = 10000 \\ C(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0 + k = k \end{cases} \rightarrow \; k=100000$$

Per tant, la funció de costos totals serà:

$$C(q) = q^3 - 3q^2 + 10q + 100000$$

- Busquem el nivell de producció i el preu que maximitzen el benefici:

$$B(q) = I(q) - C(q) = pq - C(q) = (8122 - 3q) \cdot q - \left(q^3 - 3q^2 + 10q + 100000\right) = -q^3 + 8112q - 100000$$
$$B'(q) = -3q^2 + 8112 \quad \rightarrow \quad B'(q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3q^2 + 8112 = 0 \quad q = \pm 52$$

Però com que no podem produir una quantitat negativa, prendrem $q = 52$.
I el preu respectiu serà: $p(52) = 8122 - 3 \cdot 52 = 7966$

Bibliografia:

Llibres

Alegre Escolano, P., Badía Batlle, C., & Sancho Insa, T. (1985). *Ejercicios resueltos de matemáticas empresariales*. Barcelona: Los autores.

Alejandre Mateo, F., Vilella Bach, C., & Llerena Garrés, F. (1995). *Problemes de matemàtiques per a econòmiques i empresarials*. Sant Cugat del Vallès: Edicions Media.

Alsina i Aubach, M., Busqué i Roca, C., & Ventura Capell, E. (1990). *500 problemes d'àlgebra*. Bellaterra: Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Hoffmann, L. D., Bradley, G. L., Rosen, K. H., & León Cárdenas, J. (2006). *Cálculo aplicado: Para administración, economía y ciencias sociales* (3a ed.). Mèxic D.F.: McGraw Hill.

Sanz Álvaro, P., Vázquez Hernández, F. J., & Ortega Ruiz, P. (1998). *Problemas de álgebra lineal: Cuestiones, ejercicios y tratamiento en DERIVE*. Madrid, etc.: Prentice Hall.

Sydsaeter, K., & Hammond, P. J. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Madrid, etc.: Prentice Hall.

Adreces electròniques:

<http://www.gencat.cat/economia/ur/ambits/universitats/acces/vies/pau/examens/index.html>.

<http://www.xtec.cat/~jlagares/matemati.htm>.

<http://www.wiris.net/demo/wiris/ca/index.html>.

<http://www.geogebra.org/cms/>.

Imatges

Les següents imatges han estat obtingudes mitjançant un programa o ambdós programes, concretament el Paint i el programari Calculadora Wiris:

Imatge 1, imatge 2, imatge 3, imatge 4, imatge 5, imatge 6, imatge 7, imatge 8, imatge 9 , imatge 10, imatge 11, imatge 12, imatge 13, imatge 14, imatge 15, imatge 16, imatge 17, imatge 18, imatge 19, imatge 20, imatge 21, imatge 22, imatge 26, imatge 28, imatge 33, imatge 36, imatge 37, imatge 38, imatge 39, imatge 40, imatge 41, imatge 42, imatge 43, imatge 44, imatge 45, imatge 52, imatge 53, imatge 54, imatge 55, imatge 56, imatge 57, imatge 58, imatge 59, imatge 60, imatge 61, imatge 62, imatge 63, imatge 64, imatge 65, imatge 66, imatge 67, imatge 68, imatge 69.

Les següents imatges han estat obtingudes mitjançant els programes Paint i Funcions para Windows, de Jordi Lagarés.

Imatge 46, imatge 47, imatge 48, imatge 49, imatge 50, imatge 51, imatge 70, imatge 71, imatge 72, imatge 73, imatge 74, imatge 75, imatge 76, imatge 77, imatge 78.

Les imatges següents estan extretes dels apunts de Matemàtiques I, del professor Aurelio Fernández de la URV:

Imatge 23, imatge 24, imatge 25.

La següent imatge ha estat obtinguda mitjançant el programa Geogebra.

Imatge 77.

Les imatges següents han estat obtingudes a partir del cercador Google i modificades amb el programa Paint.

Imatge 34, imatge 35.

Exercicis

Els exercicis següents han estat extrets del llibre: Sydsaeter, K., & Hammond, P. J. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Madrid, etc.: Prentice Hall.

Exercici 3, exercici 6, exercici 11(b), exercici 60 (i).

Els exercicis següents han estat extrets del llibre: Alsina i Aubach, M., Busqué i Roca, C., & Ventura Capell, E. (1990). *500 problemes d'àlgebra*. Bellaterra: Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Exercici 7, exercici 8, exercici 11(a), exercici 12, exercici 15(a).

Els exercicis següents han estat extrets del llibre: Alejandre Mateo, F., Vilella Bach, C., & Llerena Garrés, F. (1995). *Problemes de matemàtiques per a econòmiques i empresarials*. Sant Cugat del Vallès: Edicions Media.

Exercici 15 (f), exercici 19,exercici 48 (c),(f) i (g), exercici 65.

Els exercicis següents han estat extrets del llibre: Alegre Escolano, P., Badía Batlle, C., & Sancho Insa, T. (1985). *Ejercicios resueltos de matemáticas empresariales*. Barcelona: Los autores.

Exercici 44 (c), exercici 45 (b), exercici 48 (a) i (i), exercici 59 (i),exercici 60 (h).

Els exercicis següents han estat extrets del llibre: Hoffmann, L. D., Bradley, G. L., Rosen, K. H., & León Cárdenas, J. (2006). *Cálculo aplicado:Para administración, economía y ciencias sociales* (3a ed.). Mèxic D.F.: McGraw Hill.

Exercici 58 (a), exercici 60 (b),(c),(e),(f),(g), exercici 62(c).

Els exercicis següents han estat extrets d'exàmens de Selectivitat de Catalunya:

Exercici 24 (juny 2009 MACS), exercici 57 (juny 2009 MACS).

Aquest llibre pretén facilitar els processos d'aprenentatge de les assignatures de matemàtiques dels estudis d'economia, empresa i finances.

L'aprenentatge no consisteix únicament en l'adquisició de nous coneixements, sinó, també i especialment, en la superació del errors comesos al llarg del procés.

Amb aquest esperit, esperem que aquest recull de conceptes i d'exercicis pugui servir per simplificar i donar resposta a les qüestions més abstractes del món de les matemàtiques, tan relatiu, ambigu i abstracte.

«Tots som ignorants; per sort,
no tots ignorem les mateixes coses.»
Albert Einstein